

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: ۱۰ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۷	مرکز سنجش آموزش و پرورش	http://aee.medu.ir	

ردیف	نمره
------	------

۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (الف) اگر $k$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $k+1$ مربع کامل است. (ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. (ج) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. (د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.	۱
۲	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ )	۱
۴	اگر $a > 1$ و $a 9k+4$ و $a 5k+3$ ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۱
۵	پاسخ هر یک از سوالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. (الف) اگر $a$ عددی صحیح و فرد باشد و $a+2 b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2+b^2+3$ را بر ۸ بیابید. (ب) مطلوبست باقی مانده تقسیم عدد $10 \times 12 + 1000 = 1210$ بر عدد ۷.	۲/۲۵
۶	معادله همنهشتی $3x \equiv 13$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
۷	با توجه به گراف $G$ (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. (ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. (ج) درجه رأس $a$ در گراف $G$ را تعیین کنید. (د) آیا گراف $G$ همبند است؟ چرا؟ (ه) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف $G$ رسم کنید.	۱/۵
۸	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۹	گراف $G$ با مجموعه رأسهای $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ج) پاسخ دهید. (الف) مجموعه همسایگی باز رأس $d$ را بنویسید. (ب) اندازه گراف را مشخص کنید. (ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	۱

ادامه سوالات در صفحه دوم

٢

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس:		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸			
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷				مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵)    ب) درست (۰/۲۵)    ج) نادرست (۰/۲۵)    د) درست (۰/۲۵) (صفحات: ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)						۱
۲	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسئله: $\beta$ گنگ است (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (صفحه: ۸)						۱/۲۵
۳	$\underbrace{2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2)}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۸)						۱
۴	$\begin{aligned} a \mid 9k + 4 &\Rightarrow a \mid 45k + 20 \quad (۰/۲۵) \\ a \mid 5k + 3 &\Rightarrow a \mid 45k + 27 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \Rightarrow a \mid 7 \quad (۰/۲۵) \xRightarrow{a>1} a=7 \quad (۰/۲۵)$ (صفحه: ۱۶)						۱
۵	الف) $a$ عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b \mid a+2$ ، بنابراین $b$ نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵) می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵) $a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m+n) + 5 \Rightarrow r=5 \quad (۰/۲۵)$ $1000 \equiv 6^5 \equiv -1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \quad (۰/۲۵)$ ب) $\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 \equiv 5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow r=5 \quad (۰/۲۵)$ (صفحات: ۱۶ و ۲۱)						۱/۲۵
۶	$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 6 \quad (۰/۲۵) \xRightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = 7k + 2 \quad (۰/۲۵) \quad (۲۵: \text{صفحه})$						۱

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس:	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	<p>الف) <math>abgc</math> (۰/۲۵)    ب) <math>bcdgb</math> (۰/۲۵)    ج) <math>\deg_G(a) = 5</math> (۰/۲۵)</p> <p>د) خیر - چون مثلاً از <math>f</math> به <math>a</math> مسیری وجود ندارد. (۰/۵)</p> <p>هـ) <math>a, b, c, d, e, f, g</math> (۰/۲۵)</p> <p>(صفحات: ۳۶ و ۳۸ و ۳۹)</p>	۱/۵
۸	<p>فرض کنیم <math>G</math> یک گراف و <math>A</math> مجموعه همه رئوس فرد گراف <math>G</math> و <math>B</math> مجموعه همه رئوس زوج گراف <math>G</math> باشد. در این صورت داریم:</p> $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v) \quad (۰/۲۵)$ <p>از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف <math>G</math> عددی زوج است یعنی <math>\sum_{v \in V(G)} \deg(v)</math> زوج (۰/۲۵)</p> <p>و <math>\sum_{v \in B} \deg(v)</math> زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین <math>\sum_{v \in A} \deg(v)</math> زوج و نتیجه می شود که <math>n(A)</math> عددی زوج است. (۰/۲۵)</p> <p>(صفحه: ۴۰)</p>	۱
۹	<p>الف) <math>N_G(d) = \{b, e\}</math> (۰/۵)    ب) <math>q = 6</math> (۰/۲۵)    ج) مجموع درجات رئوس <math>= 12</math> (۰/۲۵)</p> <p>(صفحه: ۴۱)</p>	۱
۱۰	<p><math>q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \quad (۰/۲۵)</math> (صفحه: ۴۲)</p> <p><math>\Rightarrow p = 9 \quad (۰/۲۵) , \Delta(G) = p-1 = 8 \quad (۰/۲۵)</math></p>	۱
۱۱	<p>الف) <math>\{b, e, h, k\}</math> (۰/۵)    ب) <math>\{a, c, e, g, i, k\}</math> (۰/۵)</p> <p>(صفحه: ۵۴)</p>	۱
۱۲	<p><math>\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times \frac{5!}{(۰/۲۵)} = 7200 \quad (۰/۲۵)</math> (صفحه: ۷۲)</p> <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱
۱۳	<p><math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad (۰/۲۵) \quad x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4 \quad (۰/۲۵)</math></p> <p><math>\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35 \quad (۰/۵)</math> (صفحه: ۷۳)</p>	۱

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس:	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۸	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۳۹۷		سرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																											
۱۴	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p> </div> <div style="margin: 0 10px;">،</div> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p> </div> <div style="margin: 0 10px;">⇒</div> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table> <p>(۰/۵) (صفحه: ۷۳)</p> </div> </div>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱/۵
۱	۳	۲																											
۳	۲	۱																											
۲	۱	۳																											
۲	۱	۳																											
۳	۲	۱																											
۱	۳	۲																											
۱۲	۳۱	۲۳																											
۳۳	۲۲	۱۱																											
۲۱	۱۳	۳۲																											
۱۵	<p>تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ۳ عضوی مانند B.</p> <p><math>A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math> S  =  B ^{ A } = 3^4 = 81</math> (۰/۲۵), <math> A_1  =  A_2  =  A_3  = 2^4 = 16</math> (۰/۲۵)</p> <p><math> A_1 \cap A_2  =  A_1 \cap A_3  =  A_2 \cap A_3  = 1</math> (۰/۲۵), <math> A_1 \cap A_2 \cap A_3  = 0</math> (۰/۲۵),</p> <p><math> \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}  =  \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}  =  S  -  A_1 \cup A_2 \cup A_3  = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36</math> (۰/۲۵)</p> <p>(صفحات: ۷۸ و ۷۹)</p>	۲																											
۱۶	<p><math>k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19</math> (۰/۵)</p> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد. <math>n = 365</math> (۰/۵)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با <math>k n + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936</math> (۰/۵)</p> <p>(صفحه: ۸۴)</p>	۱/۵																											

«مصححین گرامی لطفاً برای راه حل‌های دیگر بارم را به تناسب تقسیم نمایید.»