

بنام خدا

# فصل دوم حسابان

کاری از:

اردشیر مرادی

معراج اندیشه تبریز

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰

مفاهیم زیر از فصل دو را بخاطر بسپارید:

۱- تابع متناوب

۲- دوره تناوب

$$3- \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$4- \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

۱- تعریف تابع متناوب: اگر تابع  $y = f(x)$  طوری باشد که  $f(T + x) = f(x)$  باشد تابع  $y = f(x)$  را تابع

متناوب می گوئیم کوچکترین عدد  $T$  که در رابطه فوق صدق کند را دوره تناوب اصلی تابع می گوئیم.

مثلا در تابع  $y = \sin x$  همواره داریم:  $\sin(2k\pi + x) = \dots = \sin(4\pi + x) = \sin(2\pi + x) = \sin x$

$2k\pi$  و  $\dots$  و  $4\pi$  و  $2\pi$  همگی دوره تناوب هستند و  $2\pi$  دوره تناوب اصلی است.

نکات: (۱) دوره تناوب تابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  برابر  $2\pi$  است.

(۲) دوره تناوب تابع  $y = \tan x$  و  $y = \cot x$  برابر  $\pi$  است.

(۳) دوره تناوب تابع  $y = \sin ax$  و  $y = \cos ax$  برابر  $\frac{2\pi}{|a|}$  است.

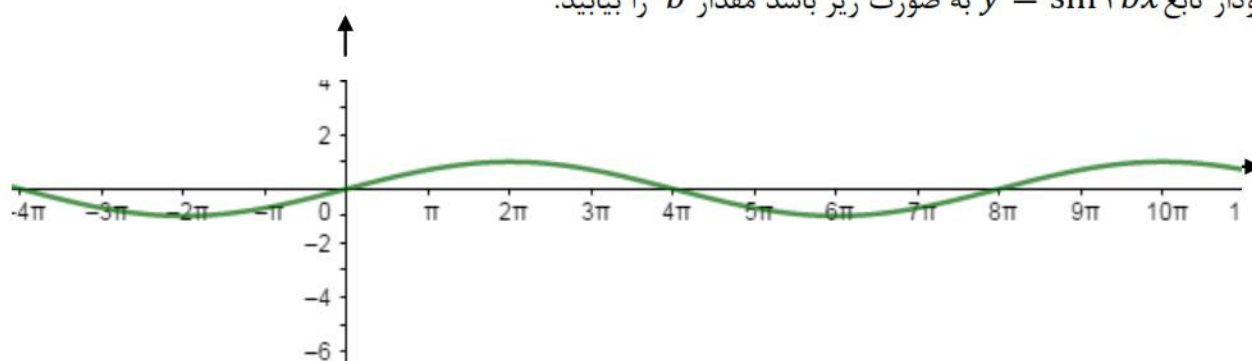
(۴) دوره تناوب تابع  $y = \tan ax$  و  $y = \cot ax$  برابر  $\frac{\pi}{|a|}$  است.

(۵) دوره تناوب تابع  $y = \sin^2 x$  و  $y = \cos^2 x$  برابر  $\pi$  است

مثال: اگر دوره تناوب تابع  $y = \sin \frac{2bx}{3}$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  باشد مقدار  $b$  را بیابید.

$$\text{حل: } \frac{2\pi}{\left|\frac{2b}{3}\right|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|\frac{2b}{3}\right| = 8 \Rightarrow |b| = 8 \times \frac{3}{2} \Rightarrow |b| = 12 \Rightarrow b = \pm 12$$

**مثال:** اگر نمودار تابع  $y = \sin 3bx$  به صورت زیر باشد مقدار  $b$  را بیابید.



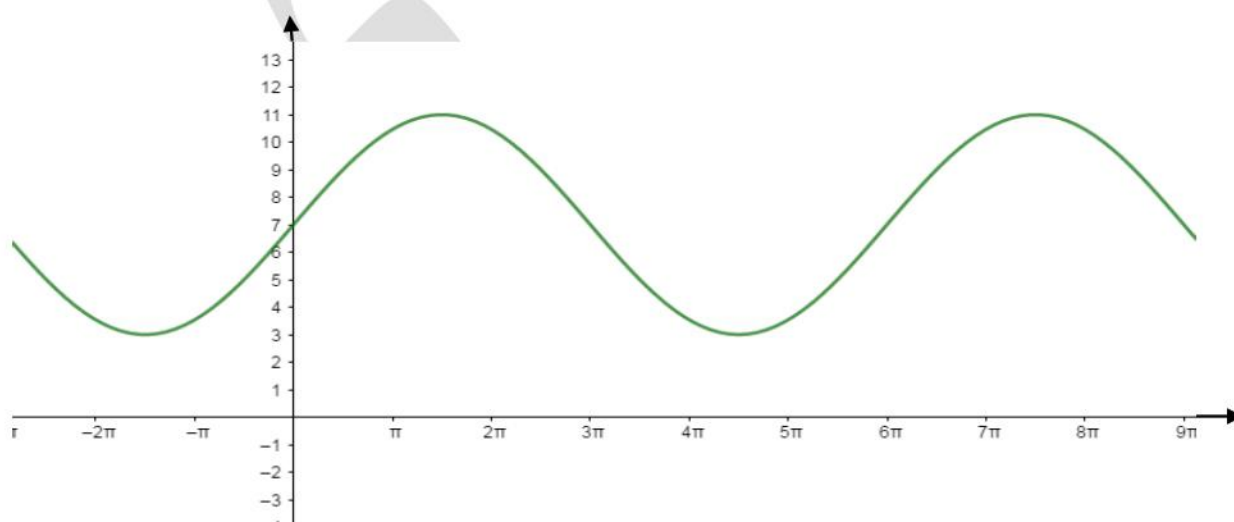
**حل:**  $T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|3b|} = 4\pi \Rightarrow |3b| = \frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{12\pi} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{6}$

**بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی:** میدانیم بیشترین و کمترین مقدار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  ترتیب ۱ و -۱ میباشد در نتیجه بیشترین و کمترین مقدار توابع  $y = a \sin x$  و  $y = a \cos x$  نیز به ترتیب  $|a|$  و  $-|a|$  خواهد بود.

**مثال:** دوره تناوب و بیشترین و کمترین مقدار تابع  $y = 3 \cos(2x)$  را محاسبه کنید.

**حل:**  $\begin{cases} \text{Max}(y) = 3 \\ \text{Min}(y) = -3 \end{cases} \quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

**مثال:** نمودار  $y = a \sin bx + c$  به صورت زیر است مقادیر  $a$ ,  $b$ ,  $c$  را بیابید.



$$\begin{cases} |a| + c = 11 \\ -|a| + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 7 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 4 \sin \frac{1}{2}x + 7$$

**مثال ۱:** در تابع  $y = a \sin bx + c$  مقدار  $a$  و  $b$  و  $c$  را چنان بیابید که دوره تناوب آن  $\pi$  و بیشترین مقدار تابع ۵ و کمترین مقدار تابع ۱ باشد.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2, \quad \begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3, \quad |a| = 2$$

**معادلات مثلثاتی:** معادلاتی که مجهول آن نسبت یا نسبتهای مثلثاتی زوایه ای مجهول باشد، معادله مثلثاتی است

$$\text{مانند} \quad \tan 3x - \cot 2x = 0 \quad \text{و} \quad 2 \sin x - 1 = 0, \quad 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

**نکته:** معادلات مثلثاتی جواب ندارند یا در صورت داشتن جواب بی شمار جواب دارند.

- روش حل معادلات مثلثاتی:

معادله را به یکی از ۴ حالت اولیه زیر در می آوریم سپس از روی آنها ۴ حالت دوم را نوشته و بالاخره جوابها را از فرمولهای حالت سوم می نویسیم:

| چهار حالت اول                | چهار حالت دوم                      | چهار حالت سوم  |
|------------------------------|------------------------------------|--|
| $1 - \sin x = a \Rightarrow$ | $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow$ | $\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ |
| $2 - \cos x = b \Rightarrow$ | $\cos x = \cos \beta \Rightarrow$  | $x = 2k\pi \pm \beta$  |
| $3 - \tan x = c \Rightarrow$ | $\tan x = \tan \theta \Rightarrow$ | $x = k\pi + \theta$  |
| $4 - \cot x = d \Rightarrow$ | $\cot x = \cot \theta \Rightarrow$ | $x = k\pi + \theta$  |

توجه: مقدار  $a$  و  $b$  باید در بازه  $[-1, 1]$  باشند، در غیر اینصورت قابل قبول نیست.

**مثال:** معادلات زیر را حل کنید:

۱)  $2 \sin 3x - 1 = 0$

۲)  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

۳)  $\tan 3x - \tan 2x = 0$

۴)  $\cos 3x + \sin x = 0$

۵)  $2(\cos 2x + 1) = 13$

**حل: ۱)**  $\sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$

**۲)**  $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos 0 \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

**۳)**  $\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$

**۴)**  $\cos 3x = -\sin x \Rightarrow \cos 3x = \sin(-x) \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$

**۵)**  $2 \cos 2x + 14 = 13 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

**توجه:** حالت‌های خاص در حل معادلات مثلثاتی

$\begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 & \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 & \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x = 0 & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 & \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 & \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\text{ح: } \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 & \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 & \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$