بنام خدا

فصل چهارم حسابان

کاری از:

اردشیر مرادی

معراج اندیشه تبریز

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰

مفاهیم زیر از فصل چهار را بخاطر بسپارید:

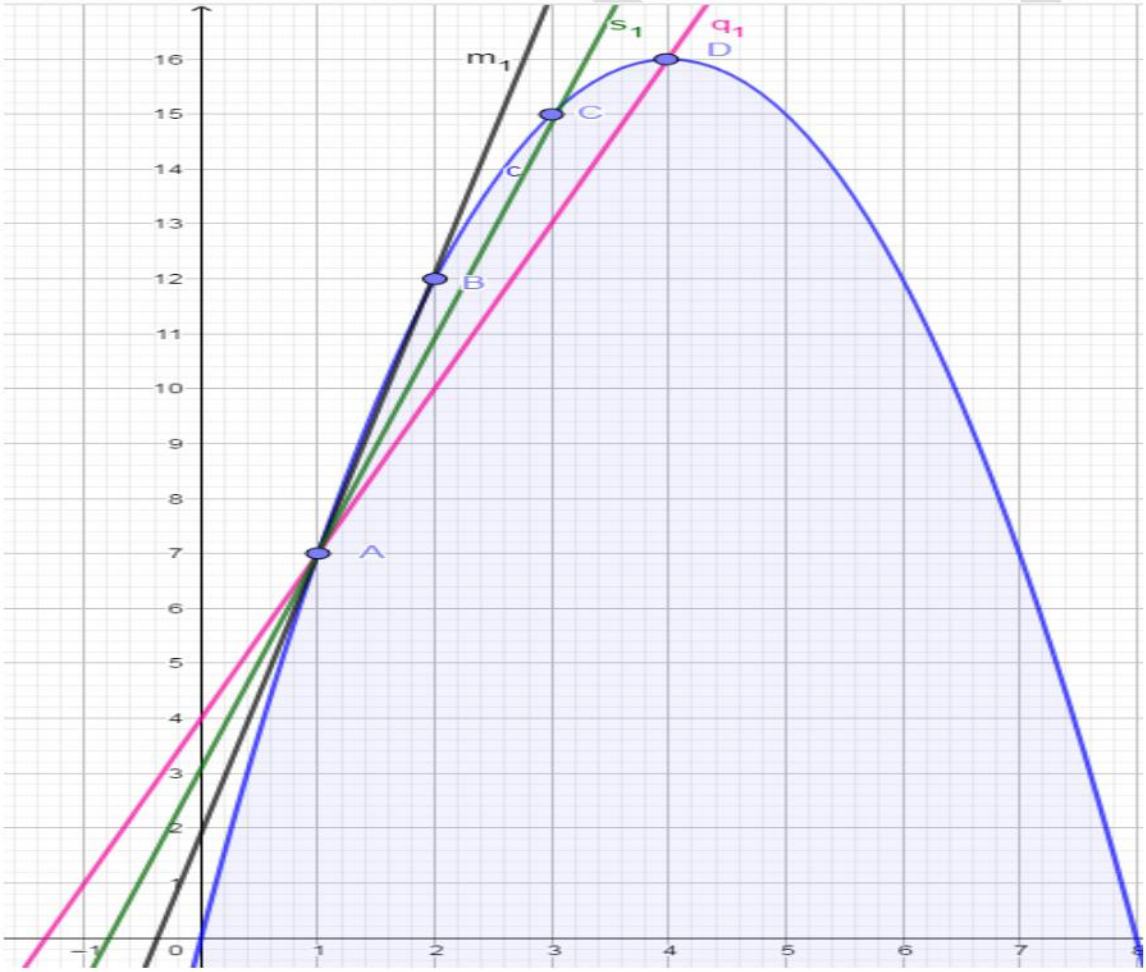
یکی از مفاهیم اساسی ریاضی مشتق می باشد که کاربردهای وسیع در ریاضی و دیگر علوم دارد.

یادآوری: میدانیم شیب خطی که از دو نقطه دلخواه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می گذرد را با m_{AB} نشان می دهیم

و از رابطه زیر می یابیم :

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نمودار تابع $y = -x^2 + 8x$ را در نظر می گیریم



نقطه $A(۱,f(۱))$ را ثابت نگه داشته و نقاط $B(۲,f(۲))$ و $C(۳,f(۳))$ و $D(۵,f(۵))$ را انتخاب نموده و شیب خطوط $AD(q_۱)$ و $AC(s_۱)$ و $AB(m_۱)$ را میابیم.

$$m_{AD}=\frac{f(۵)-f(۱)}{۵-۱}=\frac{۸}{۴}=۲ \qquad m_{AC}=\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=۴ \qquad m_{AB}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=۵$$

حال اگر نقطه ای مانند $E(۱/۱,f(۱/۱))$ روی تابع انتخاب کنیم خواهیم داشت :

$$* \ m_{AE}=\frac{f(۱+۰/۱)-f(۱)}{۱/۱-۱}=\frac{/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$$

بنابراین اگر m شیب خط مماس بر تابع در A باشد

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

با توجه به شکل و مطالب فوق ملاحظه می کنیم هر چه نقاط به A نزدیکتر میشوند خطوط $q_۱$ و $s_۱$ و $m_۱$ به خطی که می تواند بر منحنی تابع $y=-x^۲+۸x$ در نقطه $A(۱,۷)$ مماس باشد نزذیکتر و نزدیکتر میشود . بنابراین می توان گفت اگر $A(x,f(x))$ نقطه ای ثابت روی تابع فرض شود مقدار عبارت $\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$ به شیب خط مماس نزدیکتر می شود اگر نقطه $B(x_۰,f(x_۰))$ به $A(x,f(x))$ نزدیکتر شود. داریم:

$$(۲)\ m_{AB}=\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} \qquad \text{یا} \qquad (۱)\ \ m=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

این حد را (در صورت وجود) مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه به طول x تعریف می کنیم. و با $f'(x)$ یا y' نشان می دهیم.

۱- تعریف مشتق :

الف: مشتق تابع $y = f(x)$ را با $f'(x)$ نشان می دهیم واز رابطه زیر بنابه تعریف می یابیم .

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ب: مشتق تابع $y = f(x)$ را در نقطه $x_۰$ با $f'(x_۰)$ نشان می دهیم واز رابطه زیر بنابه تعریف می یابیم .

$$f'(x_۰) = \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$$

مثال: درتابع $f(x) = \sqrt{x-۱}$ مقدار $f'(۵)$ را به دو روش بیابید.

$$۱)\ f'(۵) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵+h)-f(۵)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\sqrt{۵+h-۱}-۲}{h} \times \frac{\sqrt{۵+h-۱}+۲}{\sqrt{۵+h-۱}+۲} = \lim_{h\to ۰} \frac{h}{h\sqrt{۵+h-۱}+۲} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{\sqrt{۵+h-۱}+۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$۲)\ f'(۵) = \lim_{x\to ۵} \frac{f(x)-f(۵)}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{\sqrt{x-۱}-۲}{x-۵} \times \frac{\sqrt{x-۱}+۲}{\sqrt{x-۱}+۲} = \lim_{x\to ۵} \frac{x-۵}{(x-۵)\sqrt{x-۱}+۲} = \lim_{x\to ۵} \frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۲} = \frac{۱}{۴}$$

۲- شیب خط مماس و رابطه آن با مشتق در یک نقطه روی تابع :

الف: اگر شیب خط مماس مثبت باشد زاویه خط مماس با جهت مثبت محور x حاده است

ب: اگر شیب خط مماس منفی باشد زاویه خط مماس با جهت مثبت محور x منفرجه است

ج: اگر شیب خط مماس صفر باشد باشد خط مماس موازی محور x ها است.

۳- فرمولهای عمومی محاسبه مشتق

در زیرفرمول مشتق بعضی از توابع را نوشته برای هر کدام چند مثال می زنیم .این فرمولها را میتوان به کمک تعریف مشتق بدست آورد.

$$۱)\ y = c \ \Rightarrow y' = ۰$$

مثال : $۱)\ y = \frac{-۳}{۷} \ \Rightarrow y' = ۰$ $\qquad ۲)\ y = ۳^{۴۵} \ \Rightarrow y' = ۰$

$$۲)\ y = ax + b \ \Rightarrow y' = a$$

مثال : ۱) $y = ۳ - ۲x \ \Rightarrow y' = -۲$ ۲) $y = \frac{۴x-۷}{۵} \ \Rightarrow y' = \frac{۴}{۵}$

$$۳)\ y = x^n \ \Rightarrow y' = nx^{n-۱}$$

مثال : ۱) $y = ۶x^۴ \ \Rightarrow y' = ۲۴x^۳$ ۲) $y = ۳x^۵ \ \Rightarrow y' = ۱۵x^۴$

$$۴)\ y = u \pm v \ \Rightarrow y' = u' \pm v'$$

مثال : ۱) $y = ۳x^۴ - ۷x^۳ \ \Rightarrow y' = ۱۲x^۳ - ۲۱x^۲$

مثال : ۲) $y = (۳x^۴ - ۷) + x^۳ \ \Rightarrow y' = ۱۲x^۳ + ۳x^۲$

$$۵)\ y = u \times v \ \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

مثال : ۱) $y = (۳x^۴ - ۷x)(x^۳ + ۵x^۴) \ \Rightarrow y' = (۱۲x^۳ - ۷)(x^۳ + ۵x^۴) +$

$(۳x^۲ + ۲۰x^۳)(۳x^۴ - ۷x)$

مثال : ۲) $y = (۳x^۴) \times (x^۳ + ۲x) \ \Rightarrow y' = ۱۲x^۳(x^۳ + ۲x) + (۳x^۲ + ۲)(۳x^۴)$

$$۶)\ y = \frac{u}{v} \ \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{(v)^۲}$$

مثال : ۱) $y = \frac{۳x-۷}{۵x^۲+۴x} \ \Rightarrow y' = \frac{۳(۵x^۲+۴x)-(۱۰x+۴)(۳x-۷)}{(۵x^۲+۴x)^۲}$

مثال : ۲) $y = \frac{۳x^۲-۸x}{۵+۴x} \ \Rightarrow y' = \frac{(۶x-۸)(۵+۴x)-(۴)(۳x^۲-۸x)}{(۵+۴x)^۲}$

$$۷)\ y = u^n \ \Rightarrow y' = nu'u^{n-۱}$$

مثال : ۱) $y = (x^۳ + ۵x^۴)^۶ \ \Rightarrow y' = ۶(۳x^۲ + ۲۰x^۳)(x^۳ + ۵x^۴)^۵$

مثال : ۲) $y = (\frac{۳x-۷}{۵x^۲+۴x})^۷ \Rightarrow y' = ۷ \times \frac{۳(۵x^۲+۴x)-(۱۰x+۴)(۳x-۷)}{(۵x^۲+۴x)^۲} \times (\frac{۳x-۷}{۵x^۲+۴x})^۶$

۸) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

مثال : ۱) $y = (۳x^۴ - \sqrt{x})(\sqrt{x} + ۵) \Rightarrow y' = \left(۱۲x^۳ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x} + ۵) + \left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(۳x^۴ - \sqrt{x})$

مثال : ۲) $y = x\sqrt{x} + ۴x^۳ \Rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}x + ۱۲x^۲$

۹) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

مثال: ۱) $y = \sqrt{۳x^۴ - ۷x^۶ + ۱} \Rightarrow y' = \frac{۱۲x^۳-۴۲x^۵}{۲\sqrt{۳x^۴-۷x^۶+۱}}$

مثال : ۲) $y = \sqrt{۵\sqrt{x} + ۴x^۳} \Rightarrow y' = \frac{۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۱۲x^۲}{۲\sqrt{۵\sqrt{x}+۴x^۳}}$

۱۰) $y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال: ۱) $y = \sqrt[۳]{x} - ۴x^۸ + \sqrt[۵]{x^۳} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} - ۳۲x^۷ + \frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$

مثال: ۲) $y = \sqrt[۳]{(۵x^۲ - ۳x)^۲} \Rightarrow y' = \frac{۲(۱۰x-۳)}{۳\sqrt[۳]{(۵x^۲-۳x)}}$

مثال: ۳) $y = \sqrt[۵]{(\frac{۵x^۲-۳x}{\sqrt{x}-۳x^۲})^۳} \Rightarrow y' = \frac{۳\times\frac{(۱۰x-۳)(\sqrt{x}-۳x^۲)-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۶x)(۵x^۲-۳x)}{(\sqrt{x}-۳x^۲)^۲}}{۵\sqrt[۵]{(\frac{۵x^۲-۳x}{\sqrt{x}-۳x^۲})^۲}}$

۴- فرمولهای مشتق گیری از توابع مثلثاتی:

$$۱-\quad y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \qquad ۲-\quad y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$$

$$۳-\quad y=\tan x \Rightarrow y'=۱+\tan^{۲} x \qquad ۴-\quad y=\cot x \Rightarrow y'=-(۱+\cot^{۲} x)$$

$$۱-\quad y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u \qquad ۲-\quad y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$$

$$۳-\quad y=\tan u \Rightarrow y'=u'(۱+\tan^{۲} u) \qquad ۴-\quad y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(۱+\cot^{۲} u)$$

۵-مشتق پذیری و پیوستگی:

تابع $y=f(x)$ ممکن است در یک نقطه مانند $A(x,f(x))$ مشتق پذیر باشد و ممکن است مشتق پذیر نباشد مثلا

برای تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$ مشتق در $x=۲$ یعنی $f'(۲)$ وجود ندارد زیرا بنابه تعریف داریم :

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۳}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۲}-۳}{x-۲}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}}\frac{x^{۲}-۳}{x-۲}=-\infty\end{cases}$$

تعریف مشتق راست و مشتق چپ یک تابع در $x=a$: تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم مشتق راست

آنرا در $x=a$ با نماد $f_{+}'(a)$ نشان میدهیم و بنابه تعریف داریم :

$$f_{+}'(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به همین ترتیب مشتق چپ را در $x = a$ با نماد $f_-'(a)$ نشان میدهیم و بنابه تعریف داریم :

$$f_-'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه: تابع $y = f(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر است هر گاه هر دو شرط زیر برقرار باشند

۱) تابع در $x = a$ پیوسته باشد .

۲) $f_+'(a) = f_-'(a)$.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = x|x-۲|$ را در $x = ۲$ بررسی کنید:

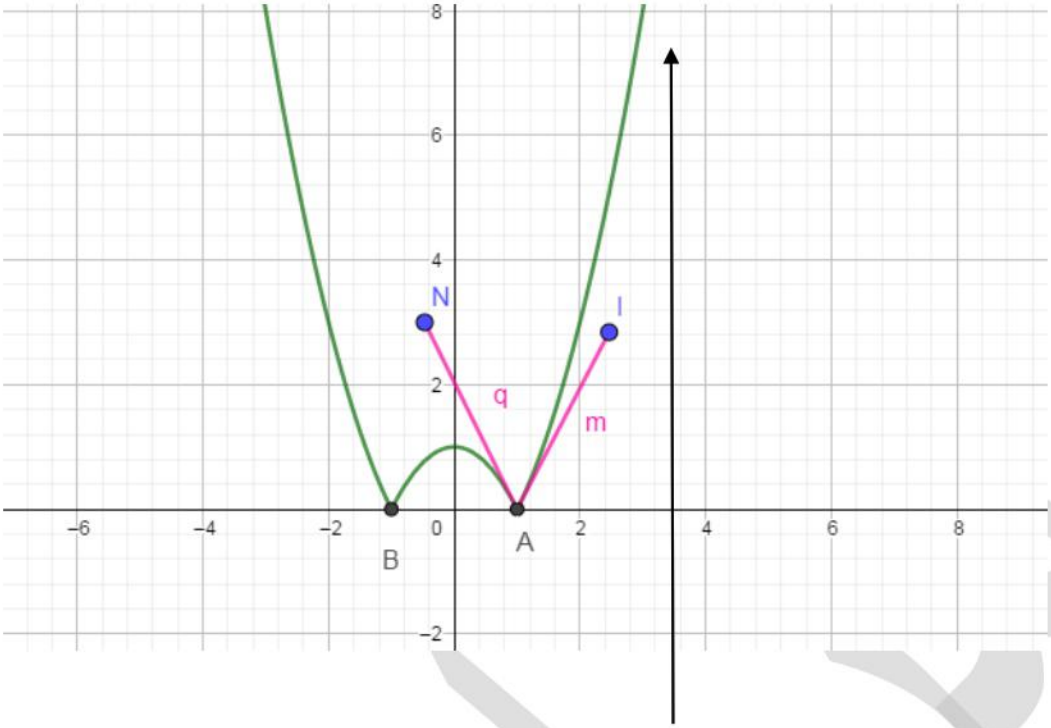
$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x|x-۲|-۰}{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} f_+'(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x(x-۲)}{x-۲} = ۲ \\ f_-'(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x(x-۲)}{x-۲} = -۲ \end{cases} \Rightarrow f_+'(۲) \neq f_-'(۲)$$

در نتیجه تابع در $x = ۲$ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در $x = ۱$ بررسی کنید:

$$f'(۱) = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} f_+'(۱) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x+۱)(x-۱)}{x-۱} = ۲ \\ f_-'(۱) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-(x+۱)(x-۱)}{x-۱} = -۲ \end{cases} \Rightarrow f_+'(۲) \neq f_-'(۲)$$

در نتیجه تابع در $x = ۲$ مشتق پذیر نیست



با توجه به شکل خط مماس در $x = ۲$ وجود ندارد ولی اگر از سمت راست به ۱ نزدیک شویم شیب نیم خط مماس (AI) برابر ۲ و اگر ازسمت چپ به ۱نزدیک شویم شیب نیم خط مماس (AN) برابر -۲ است.

مثال: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند و $f'(۲) = ۳$ و $g'(۲) = ۴$ و $f(۲) = -۲$ و $g(۲) = ۵$ باشد ، مقدار $(f+g)'(۲)$ و $(\frac{g}{f})'(۲)$ را بیابید.

$$(f+g)'(۲) = (f'+g')(۲) = f'(۲) + g'(۲) = ۳ + ۴ = ۷$$

$$(\frac{g}{f})'(۲) = \frac{g' \times f - f' \times g}{(f)^۲}(۲) = \frac{g'(۲) \times f(۲) - f'(۲) \times g(۲)}{(f(۲))^۲} = \frac{۴ \times (-۲) - ۳ \times ۵}{۴} = -\frac{۲۳}{۴}$$