

بنام خدا

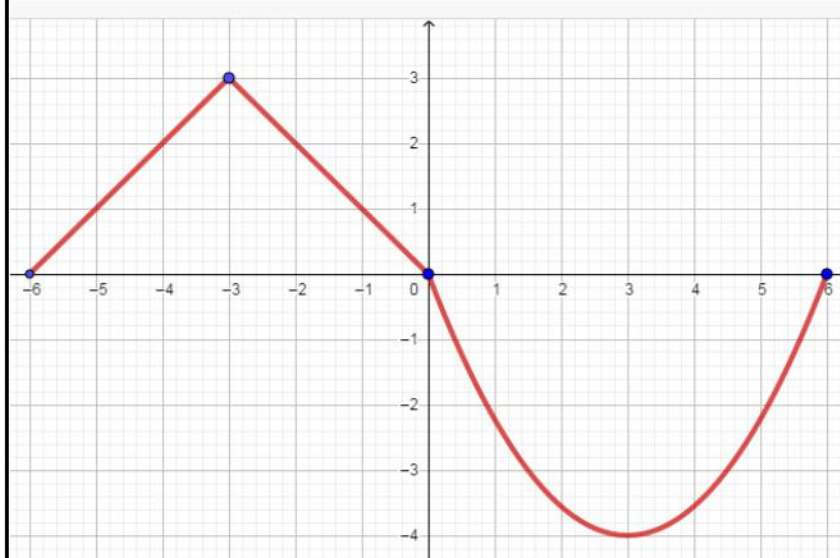
فصل اول حسابان

کاری از:

اردشیر مرادی

معراج اندیشه تبریز

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰



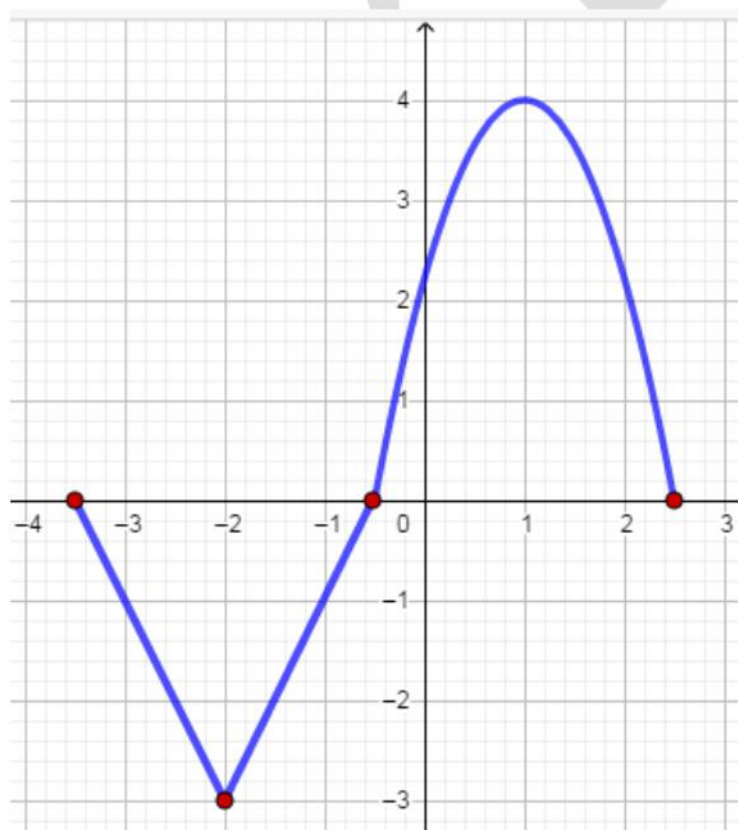
۱- نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر داده شده است.

نمودار $y = -f(2x + 1)$ رسم کنید ،

دامنه و برد آنرا بیابید.

ابتدا نقاط مشخص را یک واحد به چپ منتقل می کنیم ، سپس طول دامنه را بر دو تقسیم نموده و بالاخره نمودار را نسبت به محور طولها قرینه می کنیم .

$$D_f = \left[-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad R_f = [-3, 4]$$



۲- اگر $P(x) = x^3 + ax + b$ بر $x + 2$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۳ باشد، مقدار a و b را بیابید.

$$p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 + (-2)a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -4$$

$$P(1) = 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\begin{cases} 2a - b = -4 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2, b = 4$$

۳- تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید :

الف: نمودار آنرا از روی نمودار $y = x^3$ رسم کنید.

ب: - آیا این تابع وارون پذیر است؟ در صورت وارون پذیر بودن، ضابطه وارون آنرا بنویسید.

الف: تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به صورت زیر

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 \Rightarrow$$

$$y = (x - 1)^3 + 1$$

نمودار $y = x^3$ را رسم کرده آنرا یک واحد به راست و

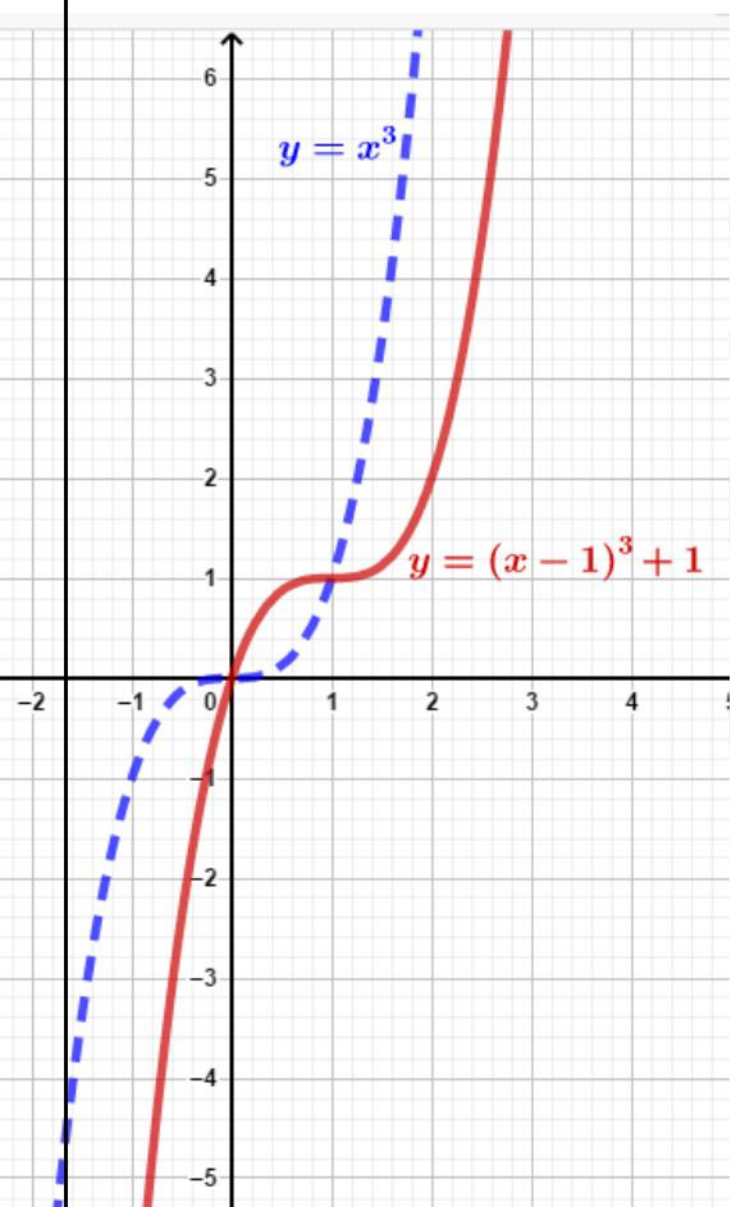
یک واحد به بالا انتقال می دهیم.

ب: بله

$$x = (y - 1)^3 + 1 \Rightarrow x - 1 = (y - 1)^3 \Rightarrow$$

$$y - 1 = \sqrt[3]{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 1$$



۴- اگر $x^3 + ax^2 + bx - 4$ بر $x + 2$ بخش پذیر و باقیمانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۶ باشد، مقدار a و b را بیابید.

$$p(-2) = -8 + 4a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow 2a - b = 6$$

$$P(1) = 1 + a + b - 4 = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

$$\begin{cases} 2a - b = 6 \\ a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5, b = 4$$

۵- اگر باقیمانده تقسیم $3x^3 - mx^2 + 2x - n + 3$ بر $x + 1$ مساوی ۴ و بر $x - 2$ برابر -4 باشد مقدار m و n را پیدا کنید.

$$P(-1) = 4 \Rightarrow -3 - m - 2 - n + 3 = 4 \Rightarrow -m - n = 6$$

$$P(2) = -4 \Rightarrow 24 - 4m - 4 - n + 3 = -4 \Rightarrow -4m - n = -27 \Rightarrow -3m = -33$$

$$m = 11 \Rightarrow n = -17$$

۶- تابع $f = \{(3,3), (2,0), (1,0), (-2,-1)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟

در این تابع داریم:

$$3 > 2 > 1 > -2 \Rightarrow f(3) = 3 > f(2) = 0 \geq f(1) = 0 > f(-2) = -1$$

لذا تابع صعودی است.

۷- عبارت $x^5 - \frac{1}{32}$ را تجزیه کنید:

$$x^5 - \frac{1}{32} = x^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (x - \frac{1}{2})(x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16})$$

۸- نامعادله زیر را حل کنید: $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$

$$x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow -x \leq -4 \Rightarrow x \geq 4$$

۹- نامعادله زیر را حل کنید: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$

$$x+1 \geq 2x-3 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4$$

۱۰- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس بازه هایی را که در آن تابع اکیدا صعودی ، اکیدا نزولی و یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & x < -2 \\ 1 & -2 \leq x < 1 \\ (x-1)^3 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



در $x < -2$ تابع نزولی و $-2 \leq x < 1$ تابع ثابت و در $x \geq 1$ تابع صعودی است.

۱۱- اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} \geq \frac{1}{64}$ باشد ، حدود x را بیابید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} \geq \frac{1}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow 2-3x \leq 6 \Rightarrow -3x \leq 4 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

مفاهیم زیر از فصل یک را بخاطر بسپارید:

۱- انتقال نمودار یک تابع مانند $y = f(x)$

الف: $y = f(x) + k$: اگر $k > 0$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها به بالا و اگر $k < 0$ باشد ، نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها به پایین منتقل میشود.

ب: $y = f(x + k)$: اگر $k > 0$ نمودار به اندازه k در جهت محور طولها به چپ و اگر $k < 0$ باشد ، نمودار به اندازه k در جهت محور طولها به راست منتقل میشود.

ج: $y = kf(x)$: اگر $k > 1$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منبسط و اگر $0 < k < 1$ باشد ، نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منقبض می شود.

توجه: اگر $k < -1$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منبسط و اگر $-1 < k < 0$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منقبض می شود و در هر دو حال ، سپس نسبت به محور x قرینه می شود . برد تابع تغییر می کند.

د: $y = f(kx)$: اگر $k > 1$ نمودار به اندازه k در جهت محور طولها منقبض و اگر $0 < k < 1$ باشد ، نمودار به اندازه k در جهت محور طولها منبسط می شود.

توجه: اگر $k < -1$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منبسط و اگر $-1 < k < 0$ نمودار به اندازه k در جهت محور عرضها منقبض می شود و در هر دو حال ، سپس نسبت به محور y قرینه می شود . دامنه تابع تغییر می کند.

۲- توابع نمایی و لگاریتمی یک به یک هستند ، لذا برای حل معادله و نامعادله شامل آنها می توان از روابط زیر استفاده نمود :

$$\log_k f(x) \leq \log_k g(x) \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \\ 0 < k < 1 \Rightarrow f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$\text{ب: } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

۳- باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - a$ برابر $p(a)$ است .

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}) \quad \text{۴- الف:}$$

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}) \quad \text{ب: اگر } n \text{ زوج باشد:}$$

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1}) \quad \text{ج: اگر } n \text{ فرد باشد:}$$

۵- صعودی یا نزولی بودن یک تابع:

الف: از روی نمودار : اگر نمودار یک تابع از چپ به راست ادامه دهیم بطوریکه نمودار پایین نیاید ، آن نمودار همواره صعودی است.

اگر نمودار یک تابع از چپ به راست ادامه دهیم بطوریکه نمودار بالا نیاید ، آن نمودار همواره نزولی است.

$$\text{ب: از روی ضابطه : تابع } y = f(x) \text{ صعودی است هر گاه : } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{تابع } y = f(x) \text{ نزولی است هر گاه : } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{ج: تابع } y = f(x) \text{ اکیدا صعودی است هر گاه : } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{تابع } y = f(x) \text{ اکیدا نزولی است هر گاه : } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

نکته: توابعی که اکیدا نزولی یا اکیدا صعودی باشند ، توابع یکنوا نام دارند .