بنام خدا

فصل پنجم حسابان

کاری از:

اردشیر مرادی

معراج اندیشه تبریز

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰

مفاهیم زیر از فصل پنج را بخاطر بسپارید:

۱- تابع صعودی و نزولی

۲- اکسترمم های نسبی

۳- جهت تقعر و نقطه عطف

۴- نقاط بحران

۵- اکسترممهای مطلق

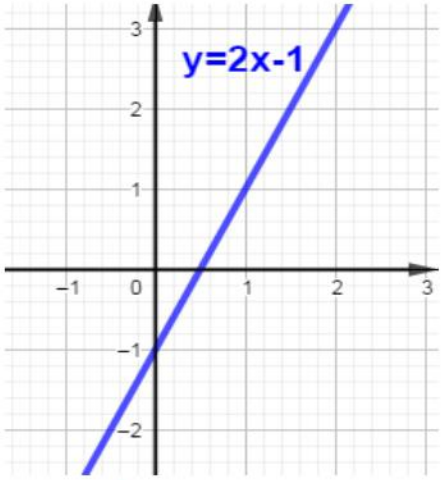
۶- جدول تغییرات و نمودار تابع درجه سه

۷- جدول تغییرات و نمودار تابع همو گرافیک

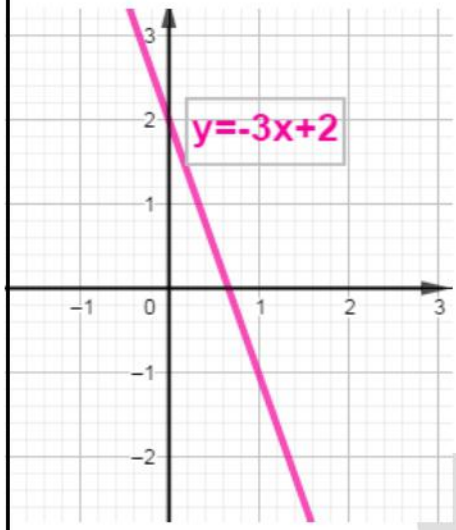
۸- روش یافتن پارامتر در توابع درجه ۳ و هموگرافیک

مرادی

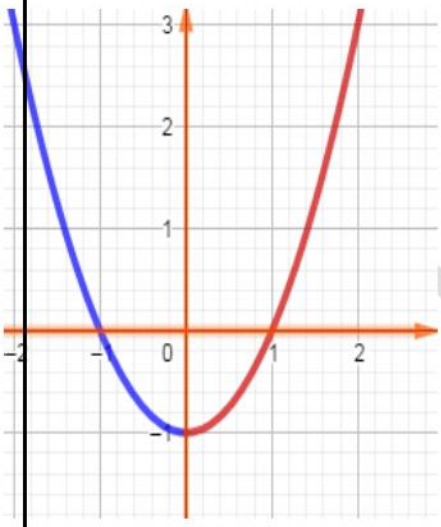
درس اول: اکسترمم های تابع



۱- در تابع با نمودار مقابل میدانیم ، تابع در R اکیدا صعودی است. همچنین مشتق آن برابر $y' = ۲$ می باشد ، یعنی مشتق همواره مثبت است.



۲- در تابع با نمودار مقابل میدانیم ، تابع در R اکیدا نزولی است. همچنین مشتق آن برابر $y' = -۳$ می باشد ، یعنی مشتق همواره منفی است.



۳- در تابع با نمودار مقابل میدانیم ، تابع در $(-\infty, ۰)$ اکیدا نزولی است.

همچنین می دانیم تابع در $(۰, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

مشتق آن $y = ۲x$ که در بازه $(-\infty, ۰)$ منفی است

مشتق آن $y = ۲x$ که در بازه $(۰, +\infty)$ مثبت است.

سوال: چه رابطه ای بین علامت مشتق و یکنوایی آن وجود دارد؟

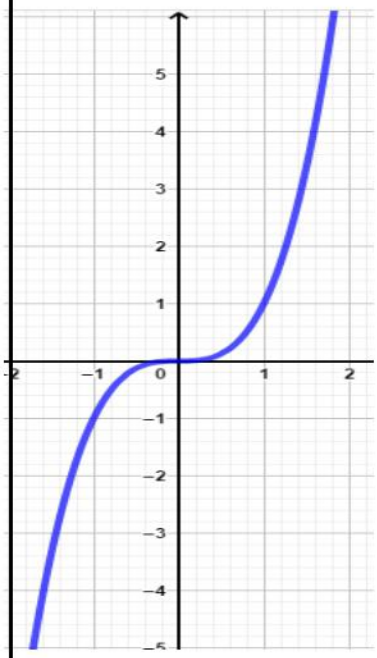
جواب را در زیر می بینیم : مشتق آن $y = ۲x$ که در بازه $(-\infty, ۰)$ منفی است

یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق: هر گاه $y = f(x)$ تابعی پیوسته در بازه (a, b) باشد آنگاه :

الف: اگر مشتق تابع $(f'(x))$ موجود و مثبت باشد تابع در این بازه اکیدا صعودی است.

ب: اگر مشتق تابع $(f'(x))$ موجود و منفی باشد تابع در این بازه اکیدا نزولی است.

ج: اگر مشتق تابع $(f'(x))$ موجود و صفر باشد تابع در این بازه تابعی ثابت است.



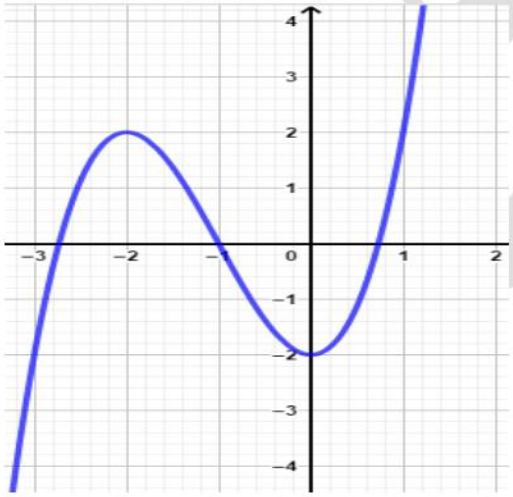
مثال۱: تابع $y = x^{۳}$ را در نظر می گیریم مشتق آن $y' = ۳x^{۲}$ همواره مثبت و تابع همواره پیوسته است در نتیجه این تابع در $(-\infty, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

مثال۲:تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۲$ داده شده است تعیین کنید تابع در چه بازه ای صعودی ودر چه بازه ای نزولی است.

$$y' = ۳x^{۲} + ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ y = -۲ \end{cases}$$

حال در یک جدول مشتق را تعیین علامت می کنیم .

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	-۲	↗	$+\infty$



با توجه به جدول تابع در بازه $(-\infty, -۲)$, $(۰, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-۲, ۰)$ تابع نزولی است

از روی نمودار نیز می توان درستی این مطلب را مشاهده کرد.

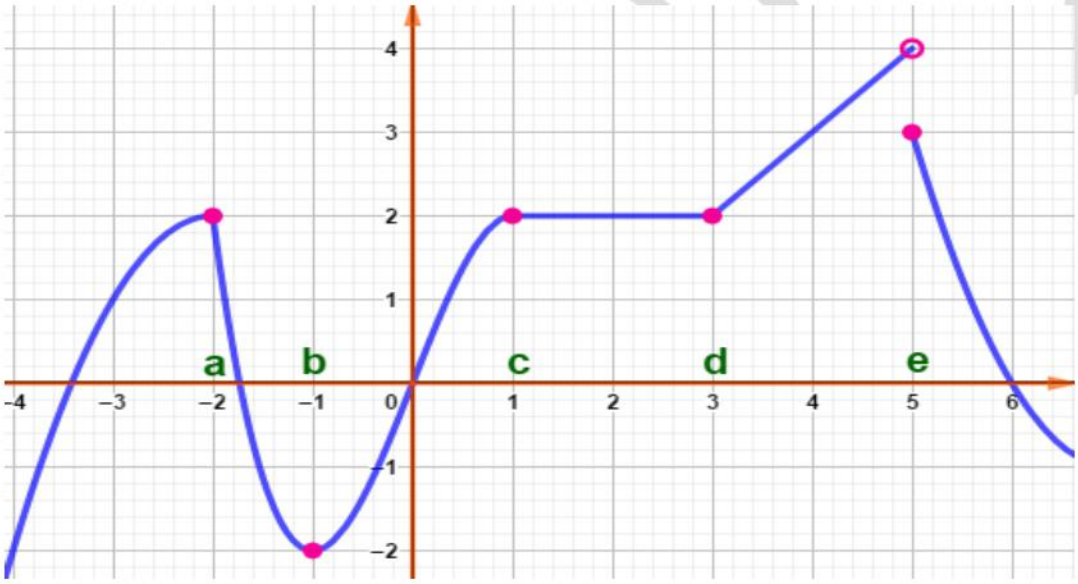
اکسترمم های نسبی:

تعریف: تابع $y = f(x)$در نقطه به طول c ماکزیموم نسبی دارد هر گاه یک همسایگی مانند $I = (a, b)$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$ در اینصورت $f(c)$ را مقدار ماکزیموم نسبی تابع می گوئیم. در مثال۲ صفحه قبل نقطه $A(-۲,۲)$ ماکزیموم نسبی است و مقدار ماکزیموم نسبی برابر ۲ می باشد.

تعریف: تابع $y = f(x)$در نقطه به طول c مینیموم نسبی دارد هر گاه یک همسایگی مانند $I = (a, b)$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ در اینصورت $f(c)$ را مقدار مینیموم نسبی تابع می گوئیم. در مثال۲ صفحه

قبل نقطه $A(۰, -۲)$ مینیموم نسبی است و مقدار مینیموم نسبی برابر ۲- می باشد.

توجه: نقاط ماکزیموم و مینیموم نسبی را نقاط اکسترمم نسبی تابع می گویند.



مثال۳: نقاط اکسترمم نسبی

تابع با نمودار زیر را بیابید .

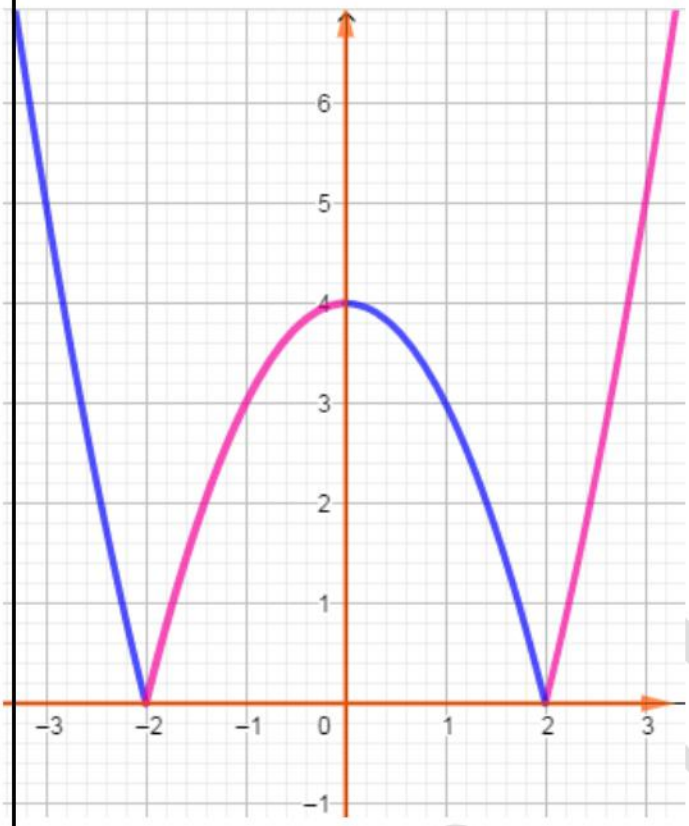
حل: نقطه $a = -۲$ نقطه ماکزیمم نسبی است .

نقطه $b = -۱$ نقطه مینیموم نسبی است .

تمام نقاط روی بازه [۱,۴] هم ماکزیموم نسبی و هم مینیموم نسبی هستند . نقطه $e = ۵$ ماکزیمم و مینیموم نسبی نیست.

مثال۴: نمودار $y = |x^{۲} - ۴|$ را رسم کنید از روی نمودار توضیح دهید تابع در چه فاصله ای صعودی اکید یا نزولی اکید است

سپس نقاط اکستر مم تابع را بیابید.



حل: میدانیم کافی است نمودار $y = x^{۲} - ۴$ را رسم کرده سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد نسبت به محور x قرینه می کنیم . مانند شکل روبرو :

حال با توجه به نمودار داریم :

تابع در فاصله های $(-\infty, -۲)$ و $(۰,۲)$ نزولی اکید و در فاصله های $(-۲,۰)$ و $(۲, +\infty)$ صعودی اکید است.

نقاط $(-۲,۰)$ و $(۲,۰)$ نقاط مینموم نسبی و نقطه $(۰,۴)$ ماکزیمم نسبی است .

روش رسم نمودار تابع درجه ۳: برای رسم نمودار یک تابع به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱) دامنه تابع را می یابیم.

۲) مشتق تابع را یافته و آنرا تعیین علامت می کنیم.

۳) مشتق دوم تابع را یافته برابر صفر قرار می دهیم تا نقطه عطف بدست آید

۴) با توجه به تغییر علامت نقاط ماکزیموم و نقاط مینیموم را در صورت وجود می یابیم.

۵) می توان از نقاط کمکی نیز استفاده کرده نمودار را رسم کنیم.

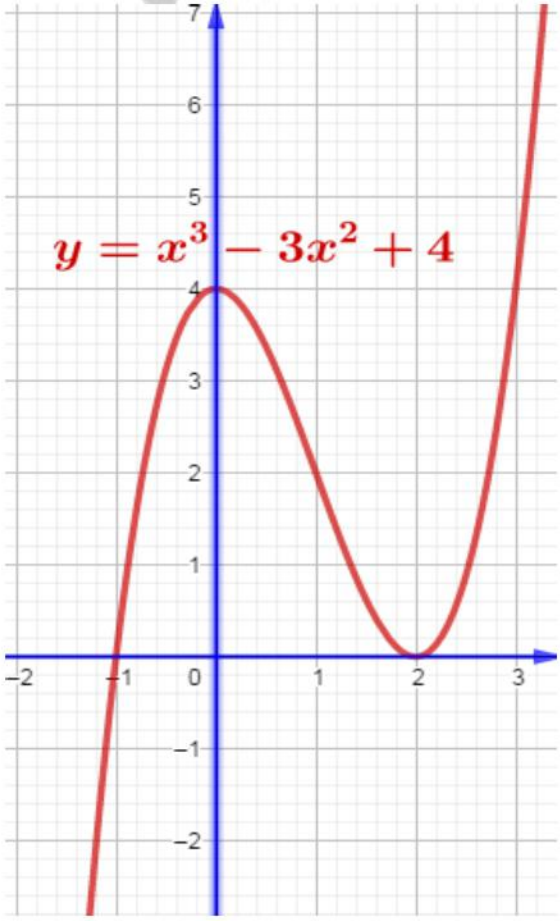
مثال۱ : نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۴$ را رسم کنید.

۱) $D_f = (-\infty, +\infty)$

۲) $y' = ۳x^{۲} - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۴ \\ x = ۲ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$ ۳) $y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۲$

۳) $x = -۱ \Rightarrow y = ۰$ نقطه کمکی

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	٤	↘	۲	↘	۰	↗	$+\infty$



تابع هموگرافیک : تابع به شکل کلی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک گویند که درآن $c \neq ۰$ است

مانند $y = \frac{۳x-۱}{x+۲}$

روش رسم جدول ونمودار تابع هموگرافیک:

۱) مشتق تابع را می یابیم ، علامت مشتق همواره مثبت یا منفی است.

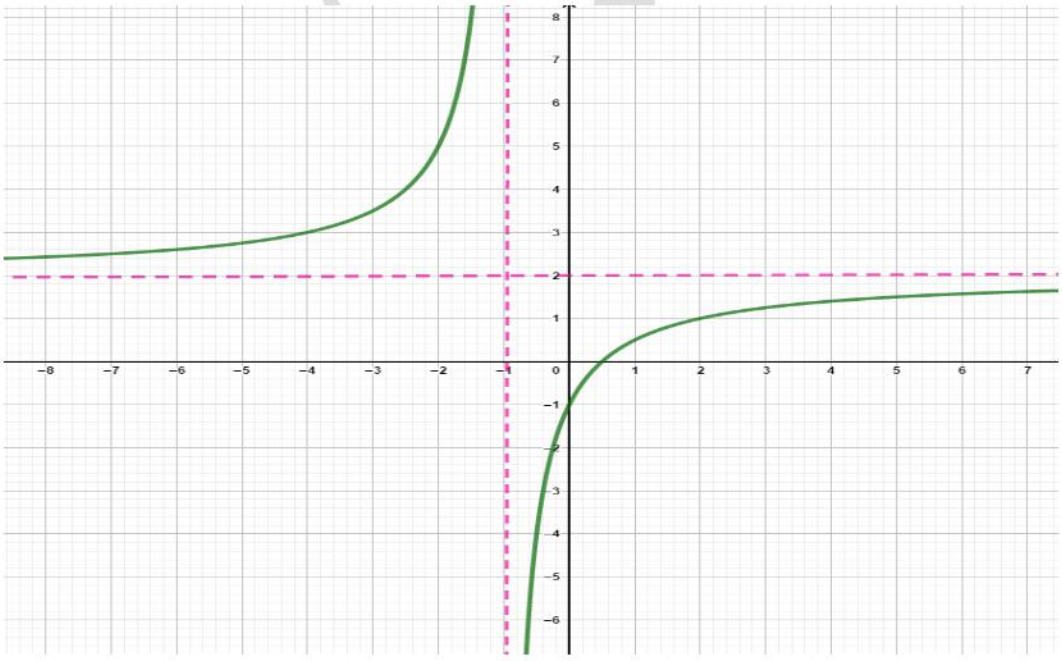
۲) $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است

۳) $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم است .

۴) جدول تغییرات را تنظیم و نمودار تابع را رسم می کنیم.

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	۲	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	۲



۱- $y' = \frac{۳}{(x+۱)^۲} > ۰$

۲- $x = -۱$ مجانب قائم

۳- $y = ۲$ مجانب افقی

مثال: در تابع $y = ax^{۲} + bx + c$ مقدار a و b و c را چنان بیابید که نقطه $(۱,۷)$ اکسترمم نسبی آن باشد. و نمودار آن از نقطه $(۲,-۲)$ بگذرد.

$$\begin{cases} f'(۱) = ۰ \\ f(۱) = ۷ \\ f(۲) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b + c = ۷ \\ ۴a + ۲b + c = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ ۳a + b = -۹ \end{cases} \Rightarrow a = -۹ \Rightarrow b = ۱۸ \ , c = -۲$$

مثال: صعودی یا نزولی بودن تابع زیر را در دامنه تعریف آنها بررسی کنید: $y = ۳x^{۴} + ۴x^{۳} + ۱$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		−	0	+	0	+	
y	$+\infty$	↘ نزولی	0	↗ صعودی	1	↗ صعودی	$+\infty$

$y' = ۱۲x^{۳} + ۱۲x^{۲} = ۰ \Rightarrow$

$۱۲x^{۲}(x + ۱) = ۰ \Rightarrow$

$x = -۱$ یا $x = ۰$

در بازه $(-\infty, -۱)$ نزولی و در بازه $(-۱, +\infty)$ صعودی است