بنام خدا

فصل سوم حسابان

کاری از:

اردشیر مرادی

معراج اندیشه تبریز

۰۹۱۴۳۱۴۰۶۳۰

مفاهیم زیر از فصل سه را بخاطر بسپارید:

در محاسبه حد توابع شرایط برای برقراری قضایا را به جهت کمبود وقت کنار گذاشته و برای آمدگی بیشتر در امتحان به طور خلاصه مفاهیم زیر را یاد آوری می کنیم:

۱- محاسبه حدودی که متغیر آنها به عددی مانند x_0 میل می کند ، عدد x_0 را به جای متغیر قرار می دهیم.

الف: اگر حاصل یک عدد حقیقی آمد کار تمام است و حد تابع همان عدد حقیقی است.

ب: اگر صورت صفر و مخرج مخالف صفر شد ، جواب صفر است .

ج: اگر صورت و مخرج هر دو صفر شدند (صفر حدی) مبهم است و رفع ابهام می کنیم. سال قبل یاد گرفتیم.

د: اگر مخرج صفر و صورت مخالف صفر شد ، جواب ∞ است و علامتش را به کمک مسئله تعیین می کنیم که این قسمت بیشتر مد نظر است

۲- محاسبه حدودی که متغیر آنها به ∞ میل می کند :

الف: در توابع به صورت چند جمله ای ، فقط حد جمله ای را می یابیم که بیشترین توان را دارد.

ب: در توابع کسری که صورت و مخرج هر کدام چند جمله ای باشند ، نیز فقط جملات با توان بیشتر از صورت و مخرج را انتخاب می کنیم و متغیرها را ساده می کنیم

۱- اگر درجه صورت و مخرج برابر باشند فقط ضرایب عددی جملات می ماند که جواب حد است.

۲- اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد جواب صفر است.

۳- اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد جواب ∞ است. علامتش را تعیین می کنیم.

توجه: اگر در صورت یا در مخرج عبارت گنگ وجود داشته باشد ، جمله با توان بزرگ داخل رادیکال را ساده کرده و مانند قبل ادامه می دهیم .

در صفحات زیر این مطالب همراه با مثالهایی بیشتر توضیح داده شده است.

توجه: هر گاه $x_۰$ عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x) = ۰$ ($l \neq ۰$ عددی ثابت) آنگاه داریم:

۱) اگر $l > ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند در اینصورت $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

۲) اگر $l > ۰$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند در اینصورت $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

۳) اگر $l < ۰$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند در اینصورت $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

۴) اگر $l < ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند در اینصورت $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

مثال: حدود زیر رابیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱-x}{x-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲x-۳}{x^۲-۶x+۹}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x-۷}{x-۳}$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x+۳}{x^۲+x-۲}$

حل: ۱) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱-x}{x-۲} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲x-۳}{x^۲-۶x+۹} = \lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲x-۳}{(x-۳)^۲} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x-۷}{x-۳} = \frac{-۴}{۰^+} = -\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x+۳}{x^۲+x-۲} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty$

توجه:

۱) اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$ (m عددی ثابت) آنگاه:

الف: اگر $m > 0$ ۱) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = +\infty$

ب: اگر $m < 0$ ۱) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = -\infty$

۲) اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$ (m عددی ثابت) آنگاه:

الف: اگر $m > 0$ ۱) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = -\infty$

ب: اگر $m < 0$ ۱) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = +\infty$

۳) اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ آنگاه:

۱) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = +\infty$

۴) اگر $n \in N$ و $a > 0$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to +\infty} ax^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$

۵) اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ نمی توان جواب $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)]$ و یا $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ را بلافاصله تعیین کرد بلکه ابتدا معادل آنها را یافته سپس حد را یافت.

مثال: حدود زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-۴x+۵}{۲x-۶x^۲+۷}\qquad ۲)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲-۶x^۳+۷}{۴x^۲-۶x+۱}\qquad ۳)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+۶x^۳-۴}{۴x^۲-۷x+۲x^۴}$$

حل:

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-۴x+۵}{۲x-۶x^۲+۷}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲(۱-\frac{۴}{۳x}+\frac{۵}{۳x^۲})}{-۶x^۲(\frac{-۲}{۶x}+۱-\frac{۷}{۶x^۲})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{-۶x^۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲-۶x^۳+۷}{۴x^۲-۶x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳(\frac{۵}{-۶x}+۱-\frac{۷}{۶x^۳})}{۴x^۲(۱-\frac{۳}{۲x}+\frac{۱}{۴x^۲})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{۲}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+۶x^۳-۴}{۴x^۲-۷x+۲x^۴}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^۳(\frac{۵}{۶x^۲}+۱-\frac{۲}{۳x^۳})}{۲x^۴(\frac{۲}{x^۲}-\frac{۷}{۴x^۳}+۱)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳}{x}=۰$$

مثال: اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۱)x^۳-۲bx^۲+۵x-۸}{(۲x-۱)(۱-x)}=۵$ باشد مقدار $a+b$ را بیابید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۱)x^۳-۲bx^۲+۵x-۸}{(۲x-۱)(۱-x)}=۵\Rightarrow a-۱=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲bx^۲}{-۲x^۲}=۵\Rightarrow b=۵$$

مثال: اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲ax^n+۲x^۳+۴x-۸}{(a-۱)x^۳+۴x}=۳$ مقدار a و n را بیابید.

چون جواب حد یک عدد است پس درجه صورت برابر درجه مخرج است اگر $n<۳$ در نتیجه داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲ax^n+۲x^۳+۴x-۸}{(a-۱)x^۳+۴x}=۳\Rightarrow\frac{۲}{a-۱}=۳\Rightarrow ۳a-۳=۲\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}$$

و اگر $n=۳$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲a+۲)x^۳+۴x-۸}{(a-۱)x^۳+۴x}=۳\Rightarrow\frac{۲a+۲}{a-۱}=۳\Rightarrow ۳a-۳=۲a+۲\Rightarrow a=۵$$

۳- مجانب های یک تابع :

الف: در تابع $y = f(x)$ خط $x = a$ را مجانب قائم تابع می گویند هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر بر قرار باشد.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

ب: در تابع $y = f(x)$ خط $y = b$ را مجانب افقی تابع می گویند هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر بر قرار باشد.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \mathrm{b}$$

روش پیدا کردن مجانبهای تابع:

۱- برای پیدا کردن مجانب قائم تابع ریشه های مخرج را می یابیم . سپس حد تابع را وقتی x به ریشه ها میل می کند می یابیم ، اگر جواب حد بی نهایت شد آن ریشه مجانب قائم است. (اگر ریشه مخرج صورت را صف نکند ، x مساوی آن ریشه مجانب قائم است.

۲- برای پیدا کردن مجانب افقی حد تابع را وقتی متغیرش به ∞ میل می کند می یابیم ، اگر جواب حد عددی مانند b شد ، $y = b$ مجانب افقی است.

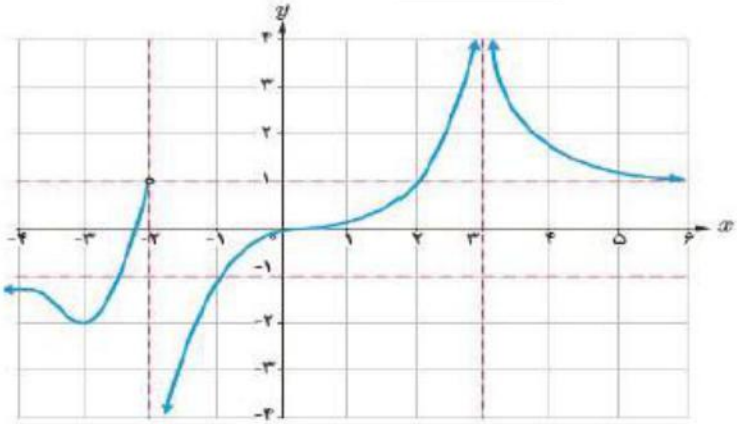
از روی نمودار هم می توان مجانبها را تعیین کرد.

مثلا در نمودار مقابل $x = ۳$ و $x = -۲$ مجانبهای قائم و $y = \pm ۱$ مجانبهای افقی است

زیرا :

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to -۲^+} f(x) = -\infty$$

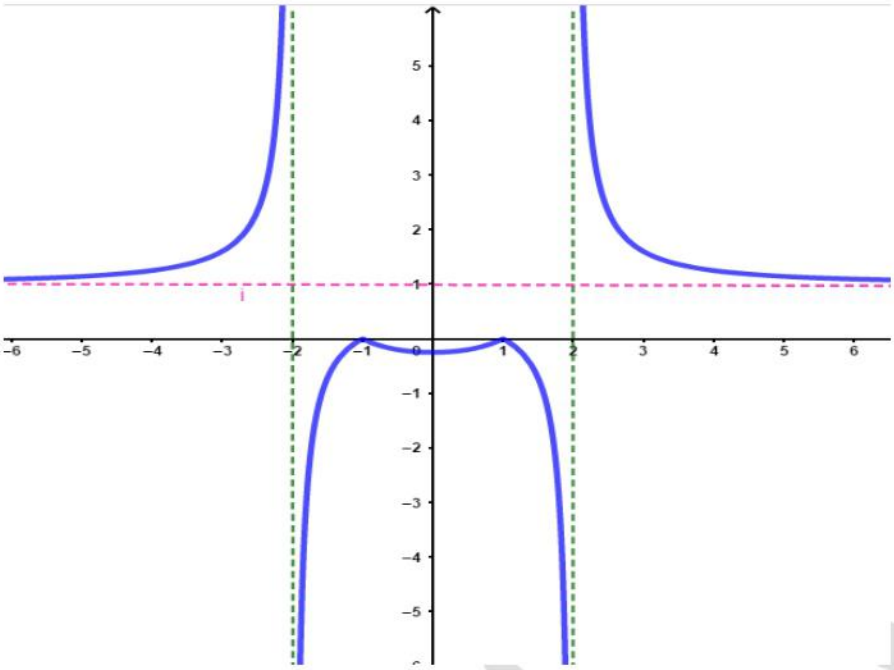
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ۱ \text{ و } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -۱$$



مثال: با توجه به شکل تابع

به سوالات زیر پاسخ

دهید.



$\lim_{x\to -۲^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -۲^-} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) =$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

مثال: مجانبهای تابع $f(x) = \frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}$ را بیابید .

$\lim_{x\pm\infty} f(x) = \lim_{x\pm\infty} \frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱} = ۱ \Rightarrow y = ۱$ مجانب افقی

$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} \Rightarrow$ مجانب قائم نیست $x = ۲$ و مجانب قائم است $x = -۲$