بسم الله الرحمن الرحیم

جمع بندی نکات امتحان نهایی ریاضیات گسسته

رشته ریاضی

گرد آورنده : سمیه قلیزاده

دبیرستان دخترانه نمونه بسیج استان زنجان

سال تحصیلی ۹۹-۹۸

فصل اول

آشنایی با نظریه اعداد

استدلال ریاضی: اثبات در ریاضی یا به صورت اثبات مستقیم است یا غیرمستقیم.

به اثبات غیرمستقیم «برهان خلف» نیز می‌گوییم

مثال نقض: مثالی که درستی یک حکم یا یک نتیجه کلی را رد می‌کند.

مثال: گزاره‌های زیر را رد یا اثبات کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ عددی اول است.

$n = 4 \rightarrow 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ ✗ نقض

ب) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخشپذیر است.

$(n) + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$ اثبات

اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها:

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

① $n = 2k \rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7 =$

$4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k' + 1$

② $n = 2k+1 \rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k + 2$

$= 2(2k^2 + 2k - 5k + 1) + 1 = 2k' + 1$

مثال: a_1 و a_2 و a_3 عددهای صحیح هستند و b_1 و b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگر قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

به برهان خلف فرض کنید عبارت داده شده زوج نباشد، پس عددی فرد خواهد بود. در نتیجه هر سه عامل آن باید فرد باشند، (چون ضرب سه عدد فرد، فرد می‌شود)، پس مجموعشان نیز باید فرد شود، ولی $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 = 0$ و این در تناقض است. پس این عبارت عددی زوج می‌باشد.

اثبات بازگشتی :

مثال : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند. ثابت کنید میانگین حسابی آنها از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حکم به صورت $\Leftarrow$ $\quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

این گزاره همواره درست است.

بخش پذیری یا عاد کردن : $a|b$ یعنی a مقسوم علیه b است. (b بر a بخش پذیر است)

ویژگی های عاد کردن :

① $a|b \Rightarrow a|mb \quad (m\in\mathbb{Z})$

② $(a|b) \wedge (b|c) \Rightarrow a|c$ ((خاصیت تعدی))

③ $(a|b) \wedge (a|c) \Rightarrow a|b\pm c$ * $a|mb\pm nc \quad (m,n\in\mathbb{Z})$

④ $a|b \ , b\neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

⑤ $a|b \Rightarrow a^n|b^n$

⑥ $(a|b) \wedge (c|d) \Rightarrow ac|bd$

⑦ $a|p$ ($a\in\mathbb{N}$ و p عدد اول) $\Rightarrow a=1$ یا $a=p$

مثال : اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a=\pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} a|7m+6 \xrightarrow{\times 6} a|42m+36 \\ a|6m+5 \xrightarrow{\times 7} a|42m+35 \end{array}\right\} \ominus \Rightarrow a|42m+36-42m-35$$

$$a|1 \rightarrow a=\pm 1$$

چون عدد ۱ فقط بر ۱ و منفی ۱ بخش پذیر است.

مثال: اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

$$\left.\begin{array}{l} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|45k+20 \\ a|5k+3 \xrightarrow{\times 9} a|45k+27 \end{array}\right\} \ominus \Rightarrow a|45k+27-45k-20$$

$$a|7 \longrightarrow a=7$$

ب.م.م: بزرگترین مقسوم علیه مشترک: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:

① $d|a$ و $d|b$ ② $\forall m>0 \; ; \; m|a \, , \, m|b \Rightarrow m \leq d$

ک.م.م: کوچکترین مضرب مشترک: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:

① $a|c$ و $b|c$ ② $\forall m>0 \quad a|m \, , \, b|m \Rightarrow c \leq m$

نکته: ① $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$ و $[a,b]=|b|$

مسأله: نشان دهید اگر p عدد اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ آنگاه $(p,a)=1$

$$(p,a)=d \begin{cases} \longrightarrow d|p \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=p \\ \longrightarrow d|a \; ① \quad \Rightarrow d=p \xrightarrow{①} p|a \quad \times \text{ تناقض} \end{cases}$$

پس $d=1$ است.

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در اینصورت، اعدادی صحیح و منحصر بفرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a=bq+r$ و $0\leq r<b$

نکته: وقتی عدد a را بر b تقسیم می‌کنیم، با توجه به اینکه باقی مانده می‌تواند بین ۰ تا b باشد، پس با این تقسیم یک افراز روی اعداد صحیح ایجاد می‌شود. چون هیچ عددی دو باقی مانده ندارد، اشتراکی نیز وجود ندارد.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2m-5n$ را بر ۱۷ بدست آورید.

$$\begin{cases} m = 17q_1 + 5 \\ n = 17q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 17(2q_1) + 10 \\ -5n = 17(-5q_2) - 15 \end{cases} \rightarrow 2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$

$$2m - 5n = 17q - 5$$

$$2m - 5n = 17q - 5 - 17 + 17$$

$$2m - 5n = 17(q-1) + 12$$

$$2m - 5n = 17q' + 12 \rightarrow \boxed{r = 12}$$

مثال: اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ می‌باشد.

$p = 6k + r \qquad 0 < r < 6$

① $p = 6k+1$ ② $p = 6k+2$ × ③ $p = 6k+3$ × ④ $p = 6k+5$

⑤ $p = 6k+4$ ×

موارد ۲ و ۳ و ۵ قابل قبول نیست، چون p عدد اول است.

پس یا $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$

هم نهشتی در اعداد صحیح:

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m | a-b$ می‌نویسیم «a با b هم نهشت است به پیمانه m» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ به عبارتی:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ , \ a \overset{m}{\equiv} b \iff m | a-b \quad (m \in \mathbb{N})$$

کلاس یا دسته هم نهشتی: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دسته هم نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و با $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای مثال: $-11 \overset{6}{\equiv} 1$ یا $12 \overset{5}{\equiv} 2$

ویژگی های هم نهشتی :

۱ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$

به دو طرف رابطه هم نهشتی عددی را می‌توان اضافه یا کم کرد (عدد صحیح)

۲ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

به دو طرف رابطه هم نهشتی عددی را می‌توان ضرب کرد (عدد صحیح)

۳ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

دو طرف رابطه را می‌توان به توان رساند $(n \in \mathbb{N})$

۴ $\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$

دو طرف دو رابطه هم نهشتی که پیمانه یکسان دارند را می‌توان جمع، منها و یا ضرب کرد.

۵ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$

به دو طرف رابطه هم نهشتی می‌توان هر مضرب از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

۶ $ac \overset{m}{\equiv} bc \ , (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

برای تقسیم رابطه هم نهشتی بر عددی، باید پیمانه بر ب.م.م عدد و پیمانه تقسیم شود.

اثبات مورد ۴ :

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\times c}{\Longrightarrow} m \mid ac-bc \\ c \equiv d \Rightarrow m \mid c-d \overset{\times b}{\Longrightarrow} m \mid bc-bd \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

مورد ۳ :

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$$

$$m \mid a^n-b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

مورد ۵ :

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ mt \overset{m}{\equiv} mk \end{matrix}\right\} \overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \rightarrow (۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \quad و \quad ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶$$

$$A=(۲۷)^{۷}+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۶ \rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \rightarrow r=۷$$

نکته: باقی مانده تقسیم عدد $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_۲a_۱a_۰}$ در حالتهای زیر:

① در تقسیم بر عدد ۹ $\Leftarrow$ $A \overset{۹}{\equiv} a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_۲+a_۱+a_۰$

② در تقسیم بر عدد ۳ $\Leftarrow$ $A \overset{۳}{\equiv} a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_۲+a_۱+a_۰$

③ در تقسیم بر عدد ۱۱ $\Leftarrow$ $A \overset{۱۱}{\equiv} a_۰-a_۱+a_۲-\cdots+a_{n-1}$

④ در تقسیم بر ۲ و ۵ و ۱۰ $\Leftarrow$ $A \overset{۱۰}{\equiv} a_۰$ و $A \overset{۵}{\equiv} a_۰$ و $A \overset{۲}{\equiv} a_۰$

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $A=۴۹۸۵۳۲۷$ را بر عدد ۱۱ و ۹ بیابید.

$$۴۹۸۵۳۲۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۷-۲+۳-۵+۸-۹+۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۶$$

$$۴۹۸۵۳۲۷ \overset{۹}{\equiv} ۴+۹+۸+۵+۳+۲+۷ \overset{۹}{\equiv} ۳۸ \overset{۹}{\equiv} ۲$$

مثال: اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد، در اینصورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

$$۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$$

$$۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱۲ بهمن پنج شنبه است.

معادله هم نهشتی : یک رابطه هم نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادله هم نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کند، یعنی $ax_0 \overset{m}{\equiv} b$ و $(a, b \in \mathbb{Z})$

قضیه : معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$.

نتیجه : اگر $(a,m)=1$ ، چون برای هر عدد b ، $1 \mid b$ پس $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره جواب دارد.

مثال : معادلات هم نهشتی زیر را حل کنید.

① $6x \overset{9}{\equiv} 11$ $\quad (6,9)=3$ و $3 \nmid 11$ جواب ندارد

② $4x \overset{6}{\equiv} 18$ $\quad (4,6)=2$ و $2 \mid 18$ جواب دارد

$2(2x) \overset{6}{\equiv} 2 \times 9$ و $(2,6)=2 \longrightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 9 \longrightarrow$

$2x \overset{3}{\equiv} 9 + (1 \times 3) \rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 12 \xrightarrow{(2,3)=1} x \overset{3}{\equiv} 6 \rightarrow x = 3k+6$

معادله سیاله خطی : هرگاه بخواهیم جواب های معادله $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ، در اینصورت معادله را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

نکته : شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله خطی $ax+by=c$ جواب داشته باشد آن است که $(a,b) \mid c$.

تبدیل معادله سیاله خطی به معادله هم نهشتی :

$$ax+by=c \Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c$$

$$\text{یا} \quad by \overset{a}{\equiv} c$$

مثال: معادله سیاله خطی $4x+5y=9$ را حل کنید.

$4x \overset{5}{\equiv} 9 \qquad (4,5)=1$ جواب دارد.

$9 \overset{5}{\equiv} 4 \longrightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{(4,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow \boxed{x=5k+1}$

$4x+5y=9 \longrightarrow 4(5k+1)+5y=9 \rightarrow 20k+4+5y=9$

$5y=-20k+5 \longrightarrow \boxed{y=-4k+1}$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

$x+y=9 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \rightarrow \boxed{x=k+9}$

$k+9+y=9 \longrightarrow \boxed{y=-k}$

$k=0 \rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases} \qquad k=-1 \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad k=-9 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases}$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $A=11!+21!+\cdots+500!$ را بر ۱۰ بدست آورید.

$11! \overset{10}{\equiv} 1$

$21! \overset{10}{\equiv} 2$

$31! \overset{10}{\equiv} 6$

$41! \overset{10}{\equiv} 4$

$51! \overset{10}{\equiv} 0$

$\vdots$

$500! \overset{10}{\equiv} 0$

$\Longrightarrow A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4$

$A \overset{10}{\equiv} 13 \overset{10}{\equiv} 3$

مثال: اگر عدد $596a13$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد a را بیابید.

$3-1+a-7+6-9+5=11k \Rightarrow a-3=11k \rightarrow a=11k+3$

$k=0 \rightarrow \boxed{a=3}$

فصل دوم

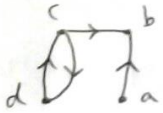
گراف و مدل سازی

معرفی گراف :

تعریف : یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره خط‌ها که به نقاط رأس و به پاره خط‌ها یال می‌گوییم.

$V(G)$ رأس $E(G)$: یال

اگر در یک گراف برای یالها جهت تعیین نشده باشد، گراف جهتدار می‌گوییم.



$V : \{a, b, c, d\}$

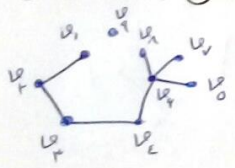
$E = \{ab, cb, cd, dc\}$

مرتبه و اندازه گراف : تعداد رأس‌ها را مرتبه و تعداد یالها را اندازه گراف می‌نامیم و مرتبه را با p و اندازه را با q نمایش می‌دهیم.

درجه یک رأس : درجه یک رأس مانند v برابر است با تعداد یالهایی که از آن می‌گذرد.

بیشترین درجه گراف را با $\Delta(G)$ و کمترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

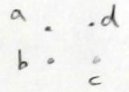
رأس تنها : به رأسی که درجه آن صفر باشد، یعنی یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها یا ایزوله می‌گوییم. v_9 رأس تنها



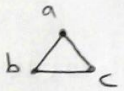
$p = 9$ $q = 7$

$\Delta = 4$ $\delta = 0$

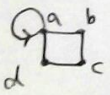
گراف تهی : گرافی که تمام رئوس آن تنها هستند، هیچ یالی ندارد.



گراف k - منتظم : گرافی که درجه تمام رئوس آن k می‌باشد.



طوقه : اگر یالی یک رأس را به خودش وصل کند، طوقه می‌نامیم.

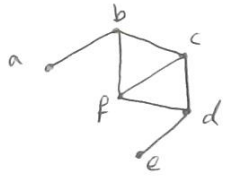


گراف ساده : گرافی که در آن طوقه موجود نباشد و بین هر دو رأس فقط یک یال موجود باشد، گراف ساده می‌نامیم.

دو رأس مجاور: دو رأس مجاور یا همسایه اند هرگاه توسط یالی بهم وصل باشند.

مجموعه همسایه های یک رأس: به مجموعه رأس هایی از گراف G که به رأس مانند v متصل هستند، همسایگی باز رأس v می گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می دهیم.

اگر خود رأس v را نیز به آن اضافه کنیم، همسایگی بسته رأس v می نامیم و با $N_G[v]$ نمایش می دهیم.

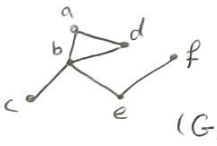


$N_G(a) = \{b\}$

$N_G[f] = \{b, c, d, f\}$

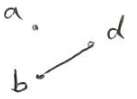
دو یال مجاور: هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن متصل باشند مانند fd و ed در شکل بالا.

زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه ای از رئوس گراف G و مجموعه یالهای آن زیرمجموعه ای از یالهای G است.

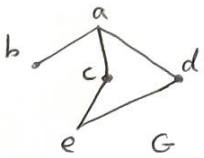


(G)

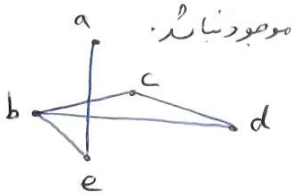
زیرگراف



مکمل یک گراف: مکمل گراف G را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می دهیم و گرافی است که مجموعه رئوس آن همان رئوس گراف G است و بین هر دو رأس آن یک یال موجود است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی موجود نباشد.



G



$\bar{G}$

گراف کامل: گرافی که تمام رئوس آن با همدیگر مجاورند. یک گراف کامل یک گراف (n-1)-منتظم می باشد. (با فرض اینکه n رأس داشته باشیم) گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم.

نکته ۱: اگر G یک گراف با n رأس باشد و v یک رأس آن باشد در اینصورت

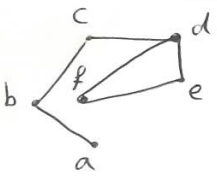
$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1$$

نکته ۲: اگر G یک گراف n رأسی باشد، آنگاه $q(G)+q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$

نکته ۳: اگر G یک گراف p رأسی باشد، آنگاه $q(G)+q(\bar{G}) = q(K_p)$

نکته ۴: مکمل گراف کامل یک گراف تهی است.

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. طول مسیر برابر تعداد یالهای موجود می‌باشد.



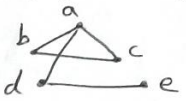
مسیر از e به b => $edcb$

طول مسیر = ۳

* گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهیم.

P_5

دور: دنباله‌ای از رئوس که از یک رأس شروع و به همان رأس ختم می‌شود و در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است و رئوس متمایز هستند. طول دور برابر تعداد یالهای موجود در دنباله است.

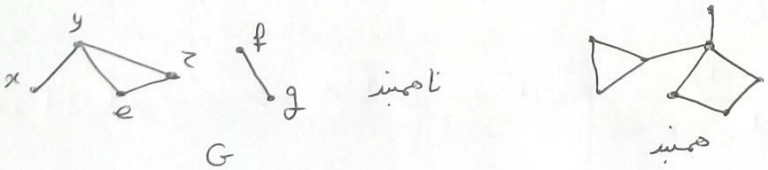


طول دور (۳) → $abca$

* گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.

C_5

همبندی و ناهمبندی: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، درغیراینصورت آن را ناهمبند می‌نامیم.



قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

مجموع درجات گراف = دو برابر تعداد یالها

نتیجه: تعداد رأسهای فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنید G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. دراینصورت

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$$

ازطرفی $\sum_{v\in B} \deg(v)$ و $\sum_{v\in V} \deg(v)$ زوج هستند، پس

$$\sum_{v\in A} \deg(v) = \sum_{v\in V} \deg(v) - \sum_{v\in B} \deg(v)$$

پس طرف دوم یعنی $\sum_{v\in A} \deg(v)$ نیز زوج می‌باشد و این یعنی تعداد مجموعه A زوج است.

مثال: آیا گرافی با ۷ رأس که درجه هر رأس آن ۳ است، وجود دارد؟

خیر چنین گرافی وجود ندارد، چون تعداد رئوس فرد گراف باید زوج باشد.

مثال: فرض کنید G یک گراف دلخواه باشد و $\delta(G) \geq 4$. نشان دهید G شامل یک مسیر به طول بزرگتر یا مساوی ۴ است.

رأس دلخواه v_1 را در نظر بگیرید، چون $\delta(G) \geq 4$ پس رأسی مانند v_2 موجود است که v_1 با v_2 وصل است. v_2 نیز حتماً به رأسی مانند v_3 وصل است (چون $\delta(G) \geq 4$) و $v_1 \neq v_3$. v_3 نیز به رأسی غیر v_1 و v_2 مانند v_4 وصل است ($\delta(G) \geq 4$). رأس v_4 نیز به رأسی بجز v_1, v_2, v_3 مانند v_5 وصل است، پس مسیری مانند $v_5 v_4 v_3 v_2 v_1$ به طول ۴ موجود است.

مسأله: الف) اگر G یک گراف n رأسی k-منتظم باشد، تعداد یالهای آن را بیابید.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2q \longrightarrow 2q = k \times n \longrightarrow q = \frac{1}{2} nk$$

ب) یک گراف n رأسی کامل چند یال دارد؟

$$2q = n(n-1) \rightarrow q = \frac{n(n-1)}{2}$$

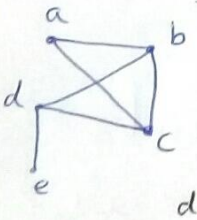
مثال: گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است، $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بیابید.

$$q = \frac{n(n-1)}{2} \longrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \longrightarrow n(n-1) = 72$$

$$9 \times 8 = 72 \longrightarrow n = 9$$

$$\Delta(G) = n-1 = 9-1 = 8 \quad ; \quad \Delta(G) = \delta(G) = 8$$

مثال: گراف G رسم شده است. مجموع درجه های رأس های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.



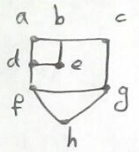
$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$6 + x = \frac{5(4)}{2} \longrightarrow x = 4$$

$$\deg_G a + \deg_{\bar{G}} a = n-1 \longrightarrow \deg_{\bar{G}} a = 4-2 = 2 \quad , \deg_{\bar{G}} c = 4-3 = 1$$

مدل سازی با گراف

تعریف: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.



$D = \{a, e, c, h\}$

تعریف: در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G، مجموعه یا مجموعه هایی که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه گر مینیمم و تعداد اعضای آن را عدد احاطه گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

$D = \{d, h, E\} \rightarrow \gamma(G) = 3$

تعریف: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر **مینیمال** می‌نامیم.

نکته: دقت کنید که احاطه گر مینیمال لزوماً مینیمم نمی‌باشد. ولی احاطه گر مینیمم، مینیمال است.

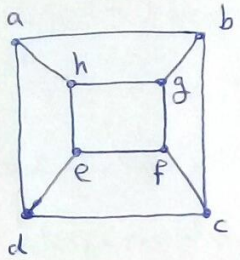
نماد: اگر x یک عدد غیرصحیح باشد، برای نمایش عدد صحیح بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم.

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه گر در آن باشد، آنگاه $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$.

یعنی $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است، یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر باشد.

مثال: عدد احاطه‌گری گراف های زیر را تعیین کنید.

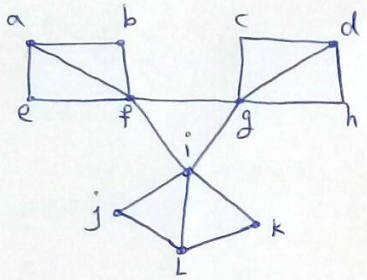


$n = ۸$ $\qquad \gamma(G) \geqslant \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

$\Delta = ۳$

$\gamma(G) \geqslant \left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geqslant ۲$

$D = \{a, f\} \rightarrow \gamma(G) = ۲$

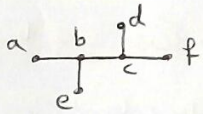


$n = ۱۲ \qquad \Delta = ۵$

$\gamma(G) \geqslant \left\lceil \frac{۱۲}{۶} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geqslant ۲$

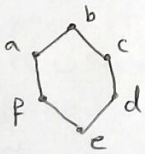
$D = \{f, g, i\} \rightarrow \gamma(G) = ۳$

مثال: الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.



$D = \{b, c\}$

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.



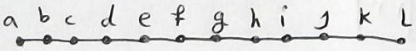
$D_1 : \{a, d\}$

$D_2 : \{b, e\}$

$\vdots$

مثال: گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک ۷-مجموعه از آن را مشخص نمایید.



$D = \{b, e, h, k\}$

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

$D = \{b, c, f, g, j, L\}$

فصل سوم

ترکیبیات

مسئله

فرض کنید شخصی وارد گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل ۷ شاخه گل از بین ۳ نوع گل متفاوت انتخاب کند، می‌خواهیم ببینیم این فرد به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

در واقع این کار معادل است با پیدا کردن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر:

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$ $\qquad$ x_1, x_2, x_3 سه نوع گل

7 تعداد گل شاخه‌ها

به حالت مشهوری می‌توان نشان داد این کار به $\binom{n+k-1}{k-1}$ روش امکان‌پذیر است.

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل نیز برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$

مثال ۱: به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل مختلف انتخاب کرد؟

$n = 9 \quad k = 4 \xrightarrow[\text{معادله}]{} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{\cancel{12}^{2} \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\cancel{3!} \times \cancel{9!}} = 220$$

نتیجه: نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

اثبات: چون جواب‌های مثبت خواسته شده است پس برای هر i، $x_i>0 \leftarrow x_i\geq 1$

$$\Rightarrow x_1\geq 1 \to x_1-1\geq 0 \to y_1=x_1-1 \to x_1=y_1+1$$

$$\vdots$$

$$x_k\geq 1 \to x_k-1\geq 0 \to y_k=x_k-1 \to x_k=y_k+1$$

معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y_1+1+y_2+1+\cdots+y_k+1=n$

$$y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$$

$$\xrightarrow[\text{تعداد جواب‌ها}]{} \binom{(n-\cancel{k})+\cancel{k}-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

مثال ۲: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1>1$ و $x_3>3$ باشند؟

$$x_1>1 \to x_1\geq 2 \to x_1-2\geq 0 \to y_1=x_1-2 \to x_1=y_1+2$$

$$x_3>3 \to x_3\geq 4 \to x_3-4\geq 0 \to y_3=x_3-4 \to x_3=y_3+4$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14 \to y_1+2+x_2+y_3+4+y_4+y_5=14$$

$$\text{یا } y_1+y_2+\cdots+y_5=14-6=8$$

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}$$ صحیح و نامنفی

مربع لاتین :

تعریف : یک جدول مربعی از اعداد $1, 2, \dots, n$ و به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ پر شده باشد و در سطر و ستون آن عدد تکراری وجود ندارد. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه گوییم.

مربع لاتین چرخشی :

۱	۲	۳	...	...	n-۱	n
n	۱	۲	...	...	n-۲	n-۱
n-۱	n	۱	...	...	n-۳	n-۲
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮
۳	۴	۵	...	...	۱	۲
۲	۳	۴	...	...	n	۱

دو مربع لاتین متعامد : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ از A و سمت راست از B است. در این صورت A و B متعامدند هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی در مربع جدید تکرار نشده باشند.

A

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

B

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

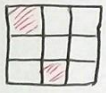
⟹

۱۳	۲۲	۳۱
۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳

متعامدند

نکته : اگر در مربع A دو جایگاه عدد یکسانی داشته باشند و همان جایگاه ها در B نیز شامل اعداد یکسانی باشند، آن گاه A با B متعامد نخواهد بود.

A



B

مثال: اگر سه برادر در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و پیراهن ها را دقیقاً یکبار استفاده کند و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار استفاده شود، چگونه می توانند این کار را انجام دهند.

کافیست دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ در نظر بگیرید. که مربع اول کت ها و مربع دوم پیراهن ها باشند. چون مربع ها لاتین هستند هر کت یک بار و هر پیراهن نیز یک بار، و چون متعامدند هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار استفاده شده است.

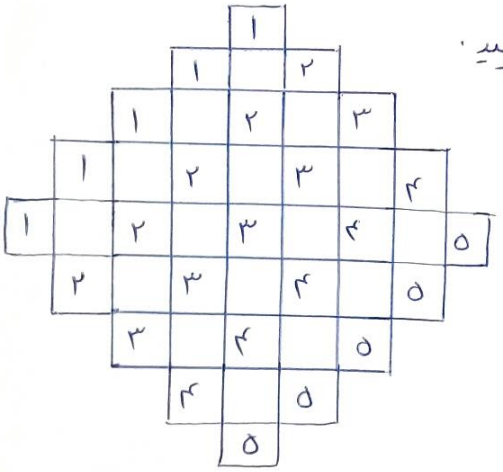
	B_1	B_2	B_3
ش	۱	۲	۳
ی	۲	۳	۱
ر	۳	۱	۲

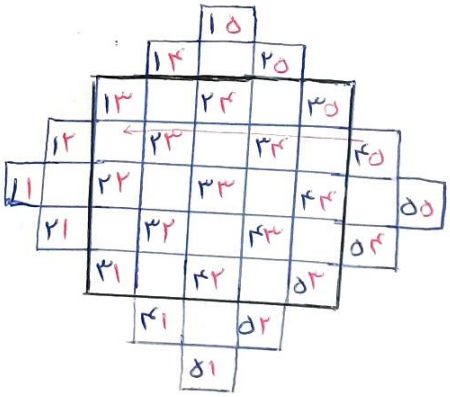
	B_1	B_2	B_3
ش	۳	۲	۱
ی	۱	۳	۲
ر	۲	۱	۳

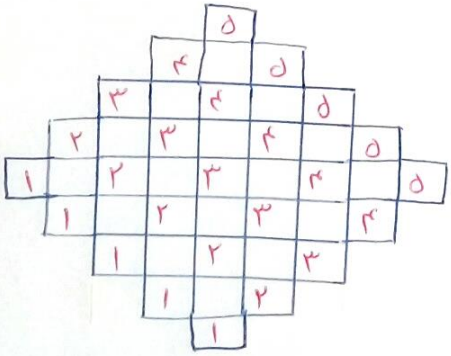
$\Rightarrow$

۱۳	۲۲	۳۱
۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳

مثال: دو مربع لاتین ۵×۵ متعامد بنویسید.







$\Downarrow$

۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

درس دوم : روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول :

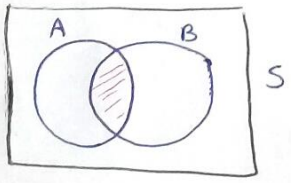
می دانیم اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه تعداد اعضای $(A\cup B)$ را با $|A\cup B|$ نمایش می دهیم که همان $n(A\cup B)$ می باشد و داریم

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

این رابطه همان اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه می باشد.

نتیجه مهم : اگر S مجموعه متناهی و A و B زیرمجموعه هایی از S باشند، آن گاه تعداد اعضایی که در هیچ از یک مجموعه های A و B قرار ندارند برابر است با :

$$|\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$$
$$= |S| - |A| - |B| + |A\cap B|$$



و برای سه مجموعه داریم :

$$|\overline{A\cup B\cup C}| = |S| - |A\cup B\cup C| =$$
$$|S| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

مثال ۱: چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 400$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ $|\overline{A \cup B \cup C}| = ?$

جواب: $|A|$ = تعداد اعداد بخش پذیر بر ۳ $\quad |B|$ = تعداد اعداد بخش پذیر بر ۴ $\quad |C|$ = تعداد اعداد بخش پذیر بر ۵

$$|A| = \left[\frac{400}{3}\right] = [133.3] = 133 \qquad |B| = \left[\frac{400}{4}\right] = 100$$

$$|C| = \left[\frac{400}{5}\right] = 80 \qquad |A \cap B| = \left[\frac{400}{12}\right] = 33 \qquad |A \cap C| = \left[\frac{400}{15}\right] = 26$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{400}{20}\right] = 20 \qquad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{60}\right] = 6$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = 400 - 133 - 100 - 80 + 33 + 26 + 20 - 6 = 190$$

مثال ۲: چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 350$، وجود دارد به طوری که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟ $|\overline{A \cup B \cup C}| = ?$

جواب:

$$|A| = \left[\frac{350}{4}\right] = 87 \qquad |B| = \left[\frac{350}{5}\right] = 70 \qquad |C| = \left[\frac{350}{6}\right] = 58$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{350}{20}\right] = 17 \qquad |A \cap C| = \left[\frac{350}{12}\right] = 29 \qquad |B \cap C| = \left[\frac{350}{30}\right] = 11$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{60}\right] = 5 \longrightarrow |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = 350 - 87 - 70 - 58 + 17 + 29 + 11 - 5 = 187$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

جواب: این مسأله همان پیدا کردن تعداد توابع پوشا از $\underset{\text{خودکار}}{|A|=4}$ به $\underset{\text{نفرات}}{|B|=3}$ است.

$A=\{a_1, \dots, a_4\}$ $\quad B=\{b_1, b_2, b_3\}$

$A_i=\{f: A \longrightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j ;\ 1\leq i\leq 4,\ 1\leq j\leq 3\}$

$|S|=3^4=81$ $\quad |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^4=16$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1^4=1$ $\quad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-16-16-16+1+1+1-0=36$

نکته: اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ در اینصورت با شرط $m\leq n$ تعداد توابع یک به یک از A به B برابر است با $P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$

مثال: تعداد توابع یک به یک از $|A|=4$ به $|B|=6$ را بیابید.

جواب: $P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=360$

مثال: ۸ نفر به یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند و انتخاب شده اند. می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

حل: حل این مسأله یعنی یافتن تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی:

$\rightarrow 8^4=4096$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار بدهیم)

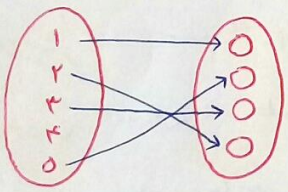
جواب: این کار معادل با پیدا کردن تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی:

$$P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1680$$

نکته: $P(m,n) = (m)_n$

اصل لانه کبوتری

تعریف: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m>n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



$۴ \to ؟$

مثال ۱: نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت پس دو ضلع مثلث هم‌رنگ خواهد بود.

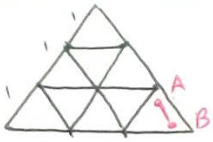
نشان ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت اند.

حل: می‌دانیم باقیمانده هر عدد بر ۴ برابر است با $R=\{0,1,2,3\}$. اگر ۵ عدد طبیعی را کبوتر ها و باقی‌مانده ها را لانه ها در نظر بگیریم چون $4<5$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، پس حداقل ۲ عدد به پیمانه ۴ هم نهشت اند (هم باقی‌مانده اند)

مثال: ثابت کنید در بین هر $n+1$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش پذیر است. یعنی به پیمانه n هم نهشت اند.

حل: باقیمانده هر عدد بر n برابر است با $R=\{0,1,\dots,n-1\}$. حال اگر $n+1$ یا حتی بیشتر عدد داشته باشیم و آنها را کبوترها و R را که تعدادش n تاست، لانه ها بگیریم پس چون $n<n+1$ طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند یعنی حداقل ۲ عدد مانند a و b بر پیمانه n بخش پذیرند.

مثال: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن ها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

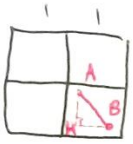


حل: مثلث را در نظر بگیرید. اضلاع آن را به سه قسمت یا واحدی تقسیم کرده، سپس ۹ خانه از وصل کردن وسط اضلاع ایجاد می‌شود. حال ما نقطه را کبوترها و ۹ خانه را لانه‌ها در نظر بگیرید.

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ عدد در یک خانه قرار می‌گیرند، آنها را A و B نامید.

چون هر خانه اضلاع آن ۱ واحد است، پس $AB < 1$

مثال: یک مربع با ضلع ۲ واحد داده شده است. نشان دهید اگر ۵ نقطه داخل این مربع در نظر بگیریم، حداقل ۲ نقطه بین آنها وجود دارد که فاصله آنها از هم کمتر از $\sqrt{2}$ است.



حل: مربع داده شده را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنیم تا ۴ خانه ایجاد شود. که اضلاع هر خانه ۱ واحد است. حال ۵ نقطه را کبوترها و ۴ خانه را لانه‌ها در نظر بگیرید، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه در یک خانه قرار می‌گیرند،

$AH < 1$ و $BH < 1$ $\rightarrow$ $AB^2 = AH^2 + BH^2 < 1^2 + 1^2 = 2$

$AB^2 < 2 \xrightarrow{\text{جذر}} AB < \sqrt{2}$

مثال: نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکی است.

حل: اعضای خانواده را کبوترها و ۴ فصل سال را لانه‌ها در نظر بگیرید، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر فصل تولدشان یکی است.

مثال: نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $p \geq 2$ حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد!

حل: مسأله را در ۲ حالت حل می‌کنیم. حالت اول: حالتی که رأس تنها نداشته باشد در این صورت درجات رئوس به صورت $p-1$ و ... و ۲ و ۱ می‌باشد. پس p را کبوترها (رئوس گراف) و درجات که $p-1$ تاست را لانه‌ها در نظر بگیرید، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ رأس وجود دارند که هم درجه‌اند.

حالت دوم: حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم، در اینصورت درجات رئوس به صورت $p-2$ و ... و ۲ و ۱ می‌باشد (چون یک رأس تنها را کنار گذاشتیم) در نتیجه $p-1$ رأس داریم. $p-1$ رأس را کبوترها و درجات که $p-2$ تاست را لانه‌ها در نظر بگیرید، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ رأس هم درجه‌اند.

سؤال: به نظر شما حالتی که دو رأس تنها یا بیشتر داریم نیز باید در نظر بگیریم؟

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است؟

حل: $k+1=7$ پس $k=6$ و n تعداد لانه‌ها که همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است. پس $kn+1=(6\times12)+1=73$

یعنی حداقل ۷۳ دانش‌آموز ماه تولدشان یکسان است.